1.5 Interférences à N ondes-Exercice 7

Une cavité optique Fabry-Pérot, remplie d'un milieu d'indice n_0, est limitée par deux miroirs plans partiellement réfléchissants, de mêmes pouvoirs de réflexion R = 0,85 et de transmission T en intensité, parallèles et distants de L.
On éclaire cette cavité en incidence normale par une onde lumineuse monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide, d'amplitude a_0 et d'intensité I_0. On s'intéresse à la lumière transmise à travers la cavité.

1-Calculer le retard de phase φ de la $(k+1)^{\text{ième}}$ onde transmise par rapport à la $k^{\text{ième}}$ onde transmise en fonction de λ, L et n_0.

2-Exprimer l'amplitude complexe A de l'onde résultante à la sortie de la cavité en fonction de a_0, R, T et φ.

3-a) Montrer que l'intensité transmise à la sortie de la cavité est de la forme : $I = \dfrac{I_{max}}{1 + m\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}$

Exprimer m en fonction de R et I_{max} en fonction de I_0, R et T.

b) Calculer le contraste et tracer $I(\varphi)$.

c) On appelle *finesse* des franges le rapport $F = 2\pi/\delta\phi$ où $\delta\phi$ est l'angle pour lequel l'intensité est égale à la moitié de sa valeur maximale. Calculer *F* pour et commenter l'intérêt de la cavité Fabry-Pérot.

4-On modifie légèrement le déphasage qui devient $\varphi' = \varphi + \Delta\varphi$ avec $\Delta\varphi << \varphi$.

a) Montrer que la nouvelle intensité à la sortie de la cavité est $I' = I + \Delta I$ et exprimer l'intensité « parasite » ΔI en fonction de I_{max}, m, φ et $\Delta\varphi$.

b) On appelle contraste de phase la quantité $C = \dfrac{|\Delta I|}{I}$. Exprimer *C* en fonction de R, φ et $\Delta\varphi$.

On admet que pour une certaine valeur de φ, *C* prend une valeur maximale égale à $C_{max} = \dfrac{2R}{1-R^2}\Delta\varphi$

5-*Application* : *observation d'une lame mince transparente*

On interpose dans le milieu d'indice n_0, parallèlement aux faces qui limitent la cavité, une lame transparente à faces parallèles de faible épaisseur e et d'indice n voisin de n_0.
On donne : $n_0 = 1,586$ (aniline) ; $n = 1,590$; $\lambda = 643,8$ nm
L'œil ne peut percevoir que des contrastes supérieurs à $C_0 = 1/8$

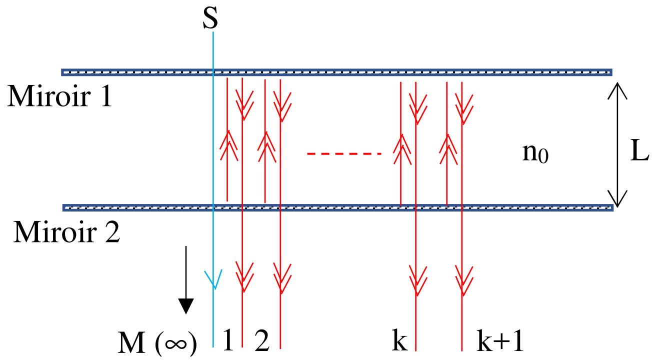
a) Calculer l'augmentation $\Delta\varphi$ du déphasage φ en fonction de e, n, n_0 et λ.

b) Calculer la plus petite valeur de l'épaisseur e de la lame susceptible d'être décelée par ce dispositif.

1.5 Interférences à N ondes-Exercice 7

1-La différence de trajet entre l'onde k et l'onde k+1 est un aller et retour sur une longueur L dans un milieu d'indice n_0

Donc : $\delta = 2n_0L$ et $\boxed{\varphi = \dfrac{4\pi n_0 L}{\lambda}}$



2-• L'onde incidente d'amplitude a_0 subit deux transmissions, avec pour chacune un coefficient de transmission en intensité T donc en amplitude $\sqrt{T}$, pour donner naissance à la première onde transmise, donc :

$$\underline{a}_1(M) = \left(\sqrt{T}\right)^2 a_0 e^{i(\omega t - \varphi_1(M))} = Ta_0 e^{i(\omega t - \varphi_1(M))}$$

• L'onde 2 subit deux réflexions en plus avec un coefficient de réflexion en amplitude $\sqrt{R}$ et le déphasage φ :

$$\underline{a}_2(M) = \underline{a}_1(M)\left(\sqrt{R}\right)^2 e^{-i\varphi} = \underline{a}_1(M)\,Re^{-i\varphi}$$

• Idem pour l'onde 3 par rapport à l'onde 2 : $\underline{a}_3(M) = \underline{a}_2(M)\,Re^{-i\varphi} = \underline{a}_1(M)\left(Re^{-i\varphi}\right)^2$

• Par récurrence : $\boxed{\underline{a}_k(M) = \underline{a}_1(M)\left(Re^{-i\varphi}\right)^{k-1} = Ta_0 e^{i(\omega t - \varphi_1(M))}\left(Re^{-i\varphi}\right)^{k-1}}$

R étant proche de 1, on suppose qu'il y a N >> 1 ondes qui interfèrent, à la limite N tend vers l'infini.

Amplitude totale : $\underline{A}(M) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underline{a}_k(M) = Ta_0 e^{i(\omega t - \varphi_1(M))} \sum_{k=1}^{+\infty}\left(Re^{-i\varphi}\right)^{k-1}$ => $\boxed{\underline{A}(M) = \dfrac{Ta_0}{1 - Re^{-i\varphi}} e^{i(\omega t - \varphi_1(M))}}$

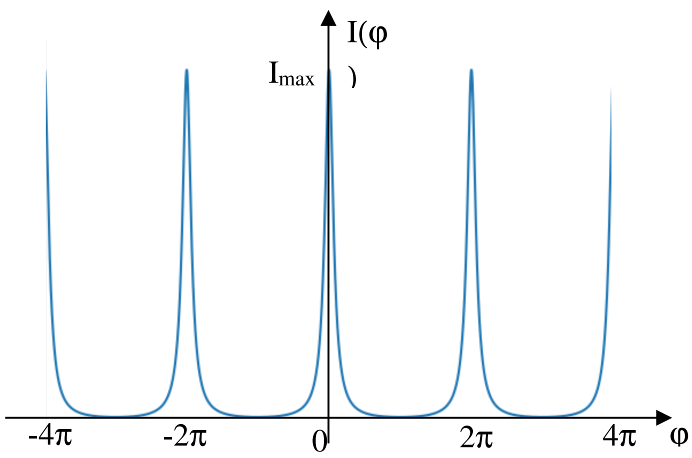
3-a) Intensité : $I = \underline{A}(M).\underline{A}^*(M) = \dfrac{Ta_0}{1 - Re^{-i\varphi}}\dfrac{Ta_0}{1 - Re^{i\varphi}} = a_0^2 \dfrac{T^2}{1 + R^2 - 2R\cos\phi} = I_0 \dfrac{T^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2})}$

=> $I = I_0 \dfrac{T^2}{(1-R)^2[1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}]} = \dfrac{I_{max}}{1 + m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$ avec $\boxed{I_{max} = I_0 \dfrac{T^2}{(1-R)^2}}$ et $\boxed{m = \dfrac{4R}{(1-R)^2}}$

b) Intensité maximum pour $\sin(\varphi/2) = 0$ soit $\varphi = 0\ [2\pi]$

Intensité minimum pour $\sin(\varphi/2) = \pm 1$ soit $\varphi = \pi\ [2\pi]$: $I_{min} = \dfrac{I_{max}}{1+m} \approx 7.10^{-3} I_{max} << I_{max}$

<u>Le contraste sera donc très proche de 1</u>. Les interférences sont bien nettes.



1.5 Interférences à N ondes-Exercice 7

On cherche : $I(\delta\phi)=\frac{I_{max}}{2}$ => $\frac{1}{1+m\sin^2\frac{\delta\varphi}{2}}=\frac{1}{2}$ => $m\sin^2\frac{\delta\varphi}{2}=1$ => $m\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)^2\approx 1$ => $\delta\varphi=\frac{1-R}{\sqrt{R}}$

La finesse vaut alors : $\boxed{F=\frac{2\pi\sqrt{R}}{1-R}=39>>1}$ <u>Les franges brillantes sont très fines.</u>

4-a) On a : $I(\varphi+\Delta\varphi)\approx I(\varphi)+\frac{dI}{d\varphi}\Delta\varphi$

Donc : $\Delta I=\frac{dI}{d\varphi}\Delta\varphi=-\frac{I_{max}\,m\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{(1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right))^2}\Delta\varphi$ Soit : $\boxed{\Delta I=-\frac{I_{max}}{2}\frac{m\sin\varphi}{(1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right))^2}\Delta\varphi}$

b) $C=\frac{|\Delta I|}{I}=\frac{\frac{I_{max}}{2}\frac{m\sin\varphi}{(1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right))^2}\Delta\varphi}{\frac{I_{max}}{1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}=\frac{1}{2}\frac{m\sin\varphi}{1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\Delta\varphi$ => $\boxed{C=\frac{2R\sin\varphi}{(1-R)^2+4R\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\Delta\varphi}$

5-a) La lame est traversée deux fois ce qui donne la différence de marche supplémentaire $2e(n-n_0)$

Donc : $\boxed{\Delta\varphi=\frac{4\pi(n-n_0)e}{\lambda}}$

b) On veut $C_{max}>C_0$ pour détecter la lame la plus fine => $\frac{2R}{1-R^2}\frac{4\pi(n-n_0)e}{\lambda}>C_0$

=> $e>e_{min}=\frac{(1-R^2)\lambda}{8\pi R(n-n_0)}C_0$

A.N : <u>e_{min} = 0,26 µm</u>
