Attention : un Devoir à rédiger à la Maison, en temps illimité, est avant tout un exercice de rédaction :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Privilégiez un raisonnement physique sur de longs calculs. Ici vous pouvez vous aider de l'article : hhttp ://fr.wikipedia.org/wiki/Arc-en-ciel
- N'hésitez pas à me poser des questions sur les points qui vous posent problème, soit en fin de cours, soit par mail.

Principe de l'arc-en-ciel

A. Introduction

On considère une bille sphérique en verre, aluminisée sur sa face arrière (Figure 1).

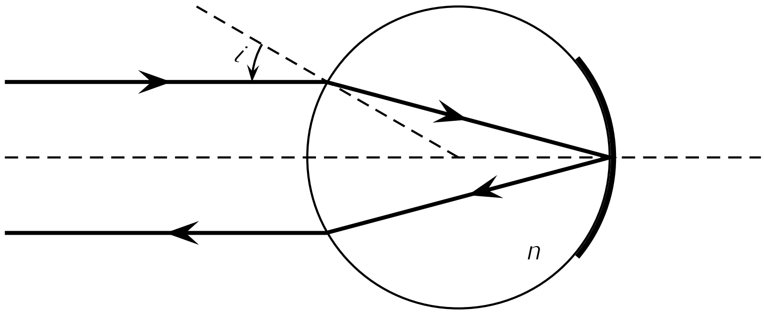


Figure 1 – Rétro-réflecteur sphérique

Déterminer l'indice de réfraction n du verre nécessaire pour que le système se comporte comme un rétro-réflecteur pour les rayons paraxiaux, c'est à dire tel que tout rayon rentrant dans la bille avec un angle d'incidence i faible ressorte parallèlement à lui-même après avoir subi une réfraction à l'entrée, une réflexion sur le fond et une réfraction à la sortie.

B. Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

I. Trajet des rayons dans une goutte d'eau sphérique.

On considère une goutte d'eau sphérique, de rayon R et d'indice de réfraction n. Les trajets des rayons lumineux sont définis Figure 2. Soit un rayon lumineux incident, situé à une hauteur h de l'axe de la goutte associée à l'angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit).

1. On note D_1 l'angle de déviation de ce rayon, à la sortie de la goutte d'eau, obtenu après une réflexion sur le fond de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte.

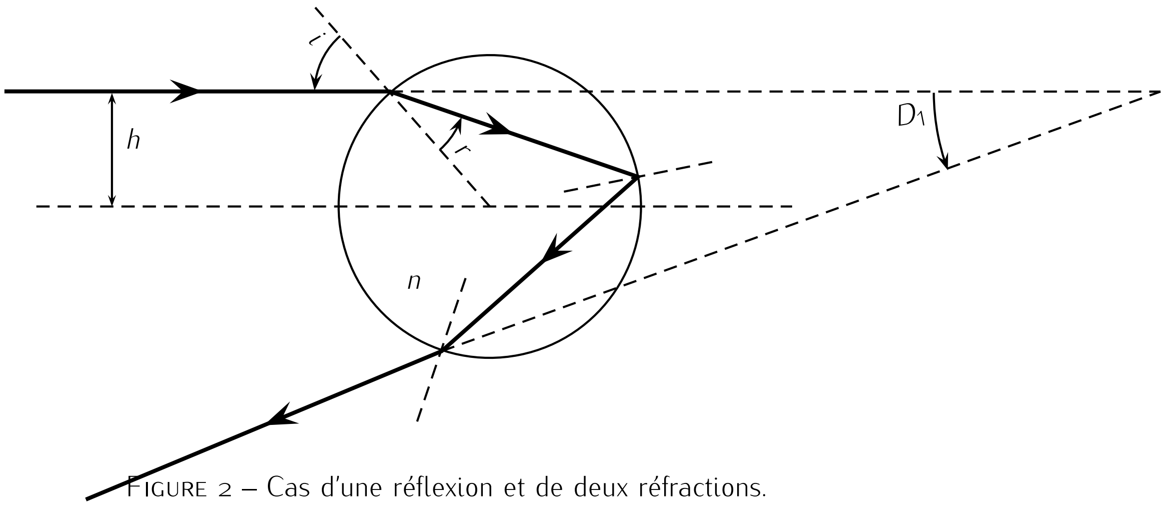


Figure 2 – Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i.

(a) Etablir la relation : $D_1 = 4r - 2i$.

(b) Exprimer l'angle D_1 en fonction de n et de $x = \frac{h}{R}$ $(0 < x < 1)$.

(c) Tracer l'allure de $D_1(x)$ dans le cas de l'eau, sachant que $n \simeq 1{,}337$.

(d) Montrer que $D_1(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur $x = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$.
On donne la dérivée de la fonction arcsin :

$$\frac{d\arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(e) On note D_{1m} la valeur correspondante de D_1.
Calculer x_m et D_{1m} (en degré) dans le cas de l'eau, sachant que $n \simeq 1{,}337$.

2. On considère maintenant un rayon lumineux qui subit deux réflexions à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (voir Figure 3).

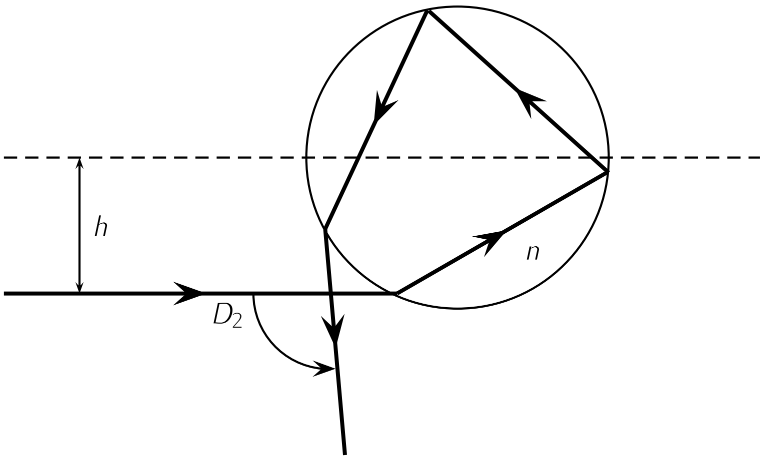


FIGURE 3 – Cas de deux réflexions et de deux réfractions.

(a) Montrer que l'angle de déviation D_2 est donné par la relation $D_2 = \pi + 2i - 6r$ où i et r sont les mêmes qu'à la question précédente.

(b) On admet que la fonction D_2 présente un extremum D_{2m} lorsque x varie.
Calculer numériquement en degré, toujours dans le cas de l'eau, cet extremum, sachant que la valeur correspondante de x vaut $\sqrt{\frac{9-n^2}{8}}$.

II. Caractéristiques de l'arc-en-ciel

Il s'agit ici de déduire les caractéristiques de l'arc-en-ciel, formé par la rétrodiffusion de la lumière solaire dans des gouttes d'eau sphériques des mécanismes présentés ci-dessus.

1. Pourquoi voit-on un arc lumineux (dit arc primaire) et parfois un second d'intensité plus faible (dit arc secondaire) ?
2. Sur un schéma, préciser les positions relatives du soleil, de la pluie et de l'observateur ?
3. Quelles sont les rayons angulaires moyens des arcs ? L'arc secondaire est-il externe ou interne ? Justifier.
4. Peut-on voir un arc-en-ciel primaire à Paris le 21 mars (équinoxe de printemps) à midi solaire c'est à dire lorsque le Soleil est au zénith de l'équateur ? On assimilera la latitude de Paris à 45 °.
5. Pourquoi voit-on des couleurs ? Préciser l'ordre des couleurs pour l'arc-en-ciel primaire ainsi que l'écart angulaire entre le violet ($\lambda = 400$ nm , $n = 1{,}34356$) et le rouge ($\lambda = 700$ nm , $n = 1{,}33052$).
6. Le ciel est sombre entre les deux arcs primaire et secondaire : interpréter sans calcul.

Principe de l'arc-en-ciel

D'après Banque PT 2010

A. Introduction

On complète la figure 1 en y appliquant directement les lois de Snell-Descartes et de la géométrie de base.

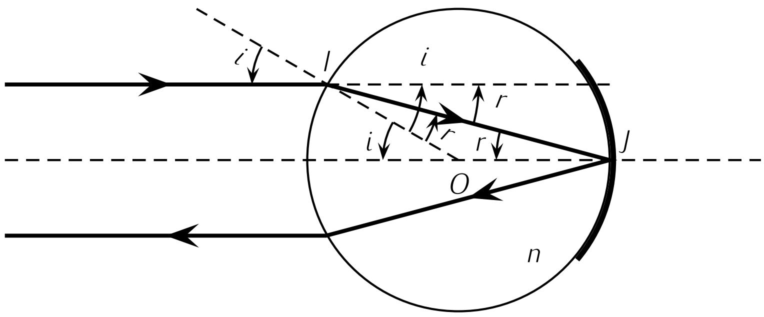


Figure 1 – Rétro-réflecteur sphérique

On effectue ensuite la mise en équation en s'appuyant sur la figure

On note r l'angle de réfraction du rayon incident sur la bille. On a ici $\sin i = n \sin r$ soit, en tenant compte de l'approximation des petits angles, $\sin i \simeq i \simeq nr$
En utilisant les propriétés des angles internes alternes, on lit directement $i = 2r$.
En comparant ces deux expressions, on tire immédiatement $\boxed{n \simeq 2}$

On encadre enfin le résultat final après avoir vérifié la cohérence et l'homogénéité

B. Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

I. Trajet des rayons dans une goutte d'eau sphérique.

Goutte d'eau sphérique, de rayon R et d'indice de réfraction n (figure 2.)

1. Pour calculer D_1 on peut se ramener à la méthode des déviations successives.

On complète à nouveau la figure en reportant r et i aux points d'incidence successifs I, J et K

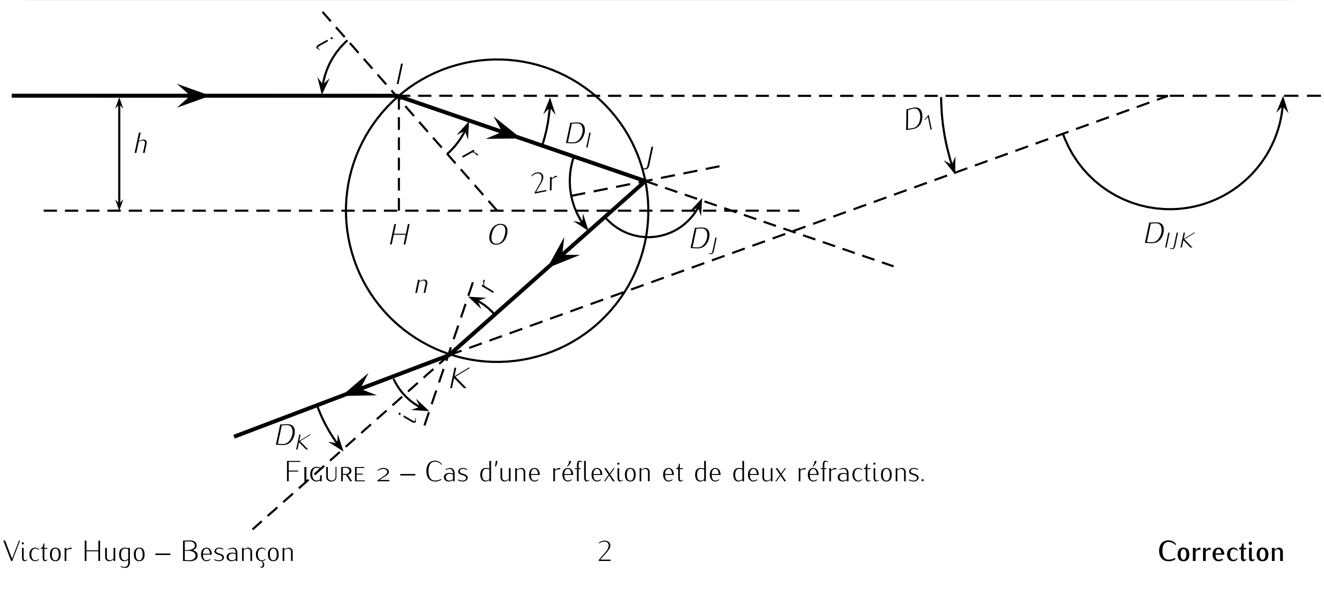


Figure 2 – Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

On commence ainsi par déterminer D_I, D_J et D_K les déviations successives.

On s'arrange pour travailler avec des angles positifs si possible

On en déduira ensuite $D_{IJK} = D_I + D_J + D_K$ telle que $D_1 + D_{IJK} = \pi$.

(a) On lit sur la figure, $D_I = i - r$, $D_J = \pi - 2r$ et $D_K = i - r$

On vérifie à chaque fois la cohérence des signes

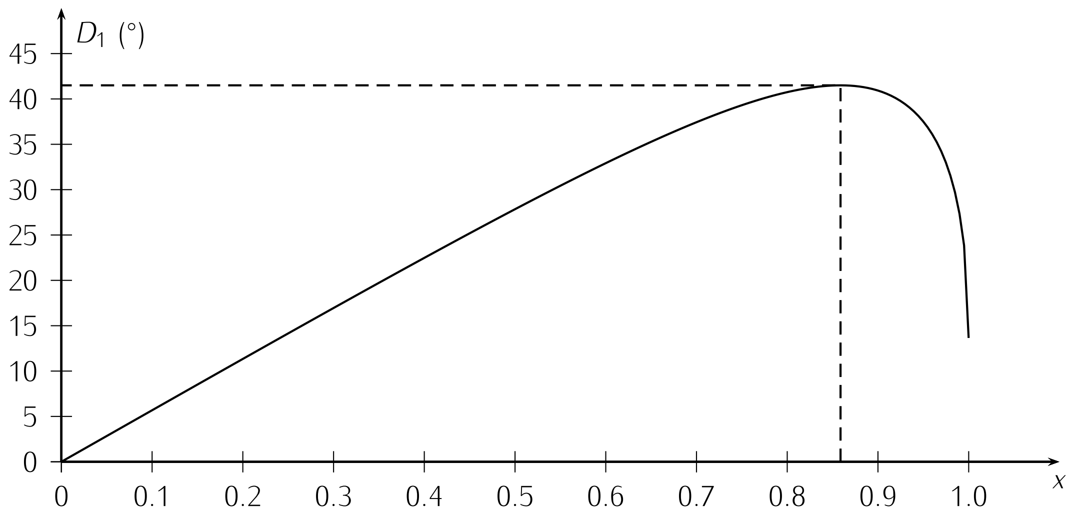
Et par sommation $D_{IJK} = D_I + D_J + D_K = 2i - 4r + \pi$ soit enfin

$$D_1 = \pi - D_{IJK} = \pi - 2i + 4r - \pi \Rightarrow \boxed{D_1 = 4r - 2i}$$

(b) Dans le triangle (IHO) rectangle en H on peut écrire $\sin i = \frac{IH}{OI} = \frac{h}{R} = x = n \sin r$ d'après la loi de Snell-Descartes sur la réfraction.

On en déduit $i = \arcsin x$ et $r = \arcsin \frac{x}{n}$ d'où l'expression $\boxed{D_1 = 4 \arcsin \dfrac{x}{n} - 2 \arcsin x}$.

(c) On trace l'allure de $D_1(x)$ avec $n \simeq 1{,}337$ et $0 \leq x \leq 1$.



Attention, $0 \leq x \leq 1$

On remarque que $D_1(x)$ passe par un maximum lorsque $x \simeq 0{,}86$ et qu'on a alors $D_1 \simeq 42$ °.

Ce genre de commentaire ne coûte rien et montre que vous analysez un minimum votre tracé.

(d) On cherche la valeur x_m de x pour laquelle la dérivée de $D_1(x)$ s'annule. Cela revient à résoudre

$$\frac{dD_1}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{4}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x_m^2}{n^2}}} - 2\frac{1}{\sqrt{1-x_m^2}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{1-x_m^2} = n\sqrt{1-\frac{x_m^2}{n^2}} \Rightarrow 4 - 4x_m^2 = n^2(1-\frac{x_m^2}{n^2})$$

$$\Rightarrow 4 - 4x_m^2 + x_m^2 = n^2 \Rightarrow \boxed{x_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}$$

Evitez la notation D', il faut préciser par rapport à quelle variable vous dérivez.

Attention à ne pas alourdir inutilement les calculs.

On ne garde que la racine positive et on vérifie que x_m est bien défini ($n < 2$) : cohérence.

(e) L'application numérique donne

$\boxed{x_m = \sqrt{\dfrac{4-1{,}337^2}{3}} \simeq 0{,}8588}$ puis $\boxed{D_{1m} = 4\arcsin\dfrac{0{,}8588}{1{,}337} - 2\arcsin 0{,}8588 \simeq 41{,}50\ °}$.

Donnez le même nombre de chiffres significatifs que la donnée de n

2. Détermination de D_2.

(a) On utilise à nouveau la méthode des déviations successives pour déterminer D_{IJLK} puis D_2 telle que $D_{IJLK} = \pi + D_2$

Privilégiez des méthodes systématiques

Par rapport la situation précédente, on a simplement une réflexion supplémentaire, en K ici.

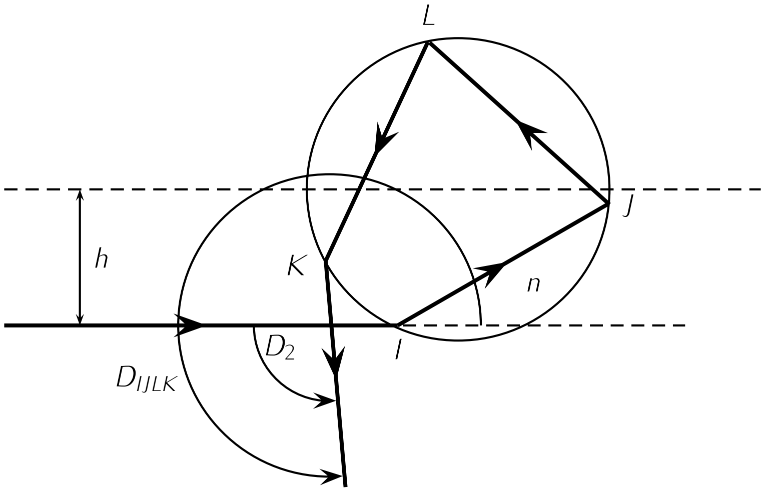


FIGURE 3 – Cas de deux réflexions et de deux réfractions.

On en déduit alors $D_{IJLK} = D_I + D_J + D_K + D_L = i - r + \pi - 2r + \pi - 2r + i - r = 2\pi + 2i - 6r$ et enfin $\boxed{D_2 = D_{IJKL} - \pi = \pi + 2i - 6r}$.

(b) On ne demande cette fois ni tracé ni calcul d'extremum, il s'agit uniquement d'effectuer l'application numérique à partir de la relation précédente, $\sin i = x$, $\sin r = \frac{x}{n}$ et $x_m = \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}$

$$D_{2m} = \pi + 2i_m - 6r_m = \pi + 2\arcsin x_m - 6\arcsin\frac{x_m}{n} = \pi + 2\arcsin\sqrt{\frac{9-1{,}337^2}{8}} - 6\arcsin\left[\frac{1}{n}\sqrt{\frac{9-1{,}337^2}{8}}\right]$$

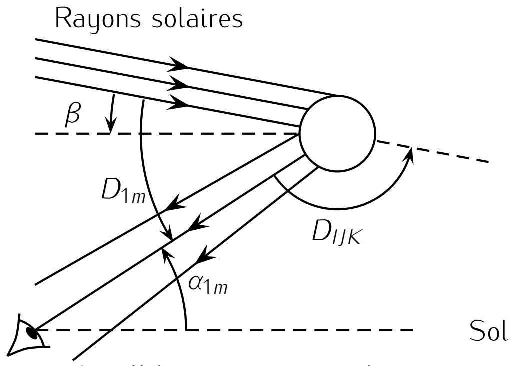
soit finalement $\boxed{D_{2m} \simeq 51{,}93\ °}$

Ne négligez pas les A.N., cela peut faire la différence en concours

II. Caractéristiques de l'arc-en-ciel

Partie plus "culture générale, discussion physique", multipliez les figures si nécessaire

1. La courbe D_{1m} passant par un maximum, D_1 varie peu autour de D_{1m}, même si x varie beaucoup autour de x_{1m}, c'est à dire pour des incidences variables.

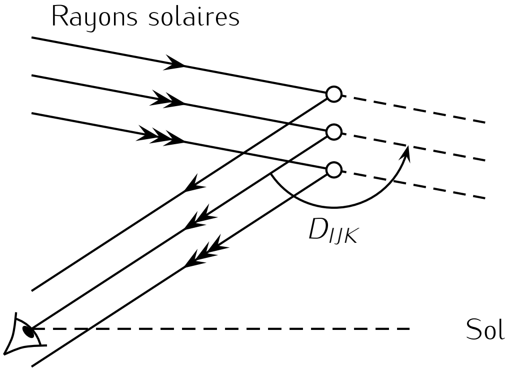


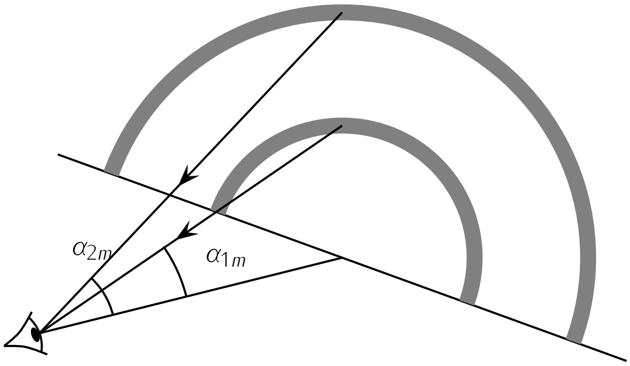
Cela signifie que lorsqu'une goutte reçoit de la lumière sous toutes les incidences possibles, les rayons émergent principalement selon des directions proches de D_{1m}, on aura alors une $\boxed{\text{accumulation de rayons}}$ dans cette direction (figure ci-contre).

Un observateur percevra principalement les gouttes qui lui transmettent le plus de lumière, c'est à dire celles vues sous l'angle α_{1m}.

La région de l'espace où se trouvent ces gouttes est un demi cône d'angle au sommet α_{1m} (il n'y a pas de goutte sous l'horizon) et l'observateur verra donc un arc de cercle – l'arc en ciel – s'il se place dos au soleil et face aux gouttes.

L'arc secondaire s'explique de la même façon en considérant cette fois les rayons ayant subit deux réflexions dans les gouttes d'eau, l'angle à considérer est alors $D_{2m} \neq D_{1m}$ d'où un second arc.





2. Figures ci-dessus.
3. Comme expliqué plus haut, le rayon angulaire correspond à α_{1m} pour le premier arc et α_{2m} pour le second.

   On lit sur la première figure du II.1 $\alpha_{1m} = D_{1m} - \beta$ où β est l'angle que font les rayons du soleil avec le sol. On aura par exemple $\boxed{\alpha_{1m} \simeq 41°}$ si le soleil est à l'horizon ($\beta = 0$).

   De la même manière, le rayon angulaire du second arc est $\boxed{\alpha_{2m} = D_{2m} - \beta \simeq 52°}$ dans les mêmes conditions.

   Comme $\alpha_{2m} > \alpha_{1m}$ $\boxed{\text{l'arc secondaire est externe}}$.
4. Si le soleil est au zénith à l'équateur, étant donnée la latitude $\lambda = 45$ ° de la ville de Paris, on aura $\beta = 45°$, $\alpha_{1m} < 0$ et un observateur situé au niveau du sol $\boxed{\text{ne pourra pas voir d'arc en ciel.}}$
5. Comme D_{1m} donc α_{1m} dépend de n qui est lui même une fonction de λ la longueur d'onde la lumière (l'eau et un milieu dispersif), l'angle sous lequel on voit l'arc dépend de λ.

   L'observateur verra donc plusieurs arcs de couleurs différentes, d'où un arc plus épais et coloré.

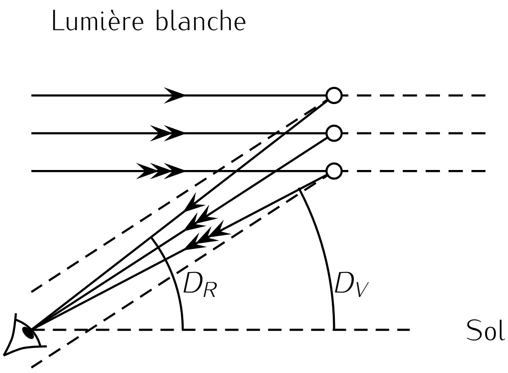
   Applications numériques : en reprenant les résultats de la question B.I.1 , on complète le tableau ci-contre.

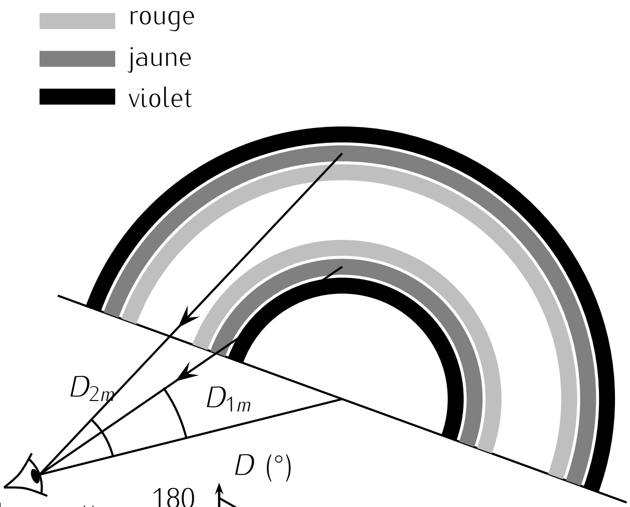
	violet	rouge
λ (nm)	400	700
n	1,34356	1,33052
x_m	0,855345	0,862113
D_{1m} (°)	40,5670	42,4401

   On remarque que $D_{1m}(\text{violet}) = D_V < D_{1m}(\text{rouge}) = D_R$ et l'écart angulaire est de l'ordre de $\boxed{\Delta D_{1m} = D_R - D_V \simeq 1{,}87310°}$

   Gardez le même nombre de chiffres significatifs que l'énoncé (6 ici)

   Pour déterminer l'ordre des couleurs vues par l'observateur, traçons une figure sur laquelle on ne fait apparaître que les rayons qui parviennent à l'observateur.





La lumière parvenant à l'observateur en provenance des gouttes du haut "sera rouge", alors que celle des gouttes du bas "sera bleue". Ainsi, pour lui, l'arc apparaît rouge à l'extérieur et bleu (violet) à l'intérieur (on peut montrer que l'ordre des couleurs est inversée pour l'arc secondaire).

6. En traçant $D_1(x)$ et $D_2(x)$, on obtient les allures ci-contre. On remarque qu'il existe bien un intervalle d'angle pour lequel il n'y a aucune lumière réfléchie : $\boxed{\text{bande plus sombre}}$.