

Chapitre 6

Fonctions usuelles

1 Logarithmes et exponentielles

1.1 Logarithme népérien

Définition 1.1 (Logarithme népérien)

Le logarithme népérien est l'unique primitive de la fonction

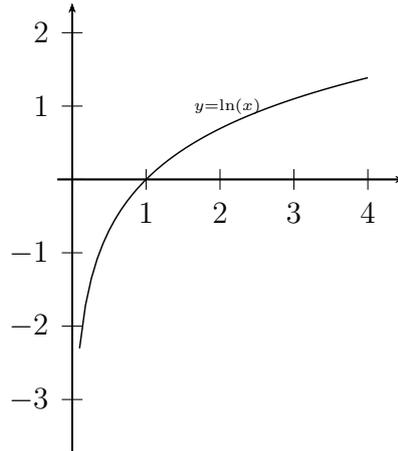
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

qui s'annule en 1. Il est noté \ln .

Proposition 1.2 (Propriétés élémentaires de \ln)

1. La fonction \ln est continue, dérivable et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et $\ln(1) = 0$.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
3. Pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\ln(a^n) = n \ln(a)$.
4. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(x) \leq x - 1$.
6. Le logarithme népérien est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Voici le graphe du logarithme népérien.

**Proposition 1.3**

1. Une primitive de \ln sur \mathbb{R}_+^* est la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$.
2. Une primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur \mathbb{R}^* est la fonction $x \mapsto \ln|x|$.

Remarque.

Les primitives sur \mathbb{R}^* de $x \mapsto 1/x$ sont les fonctions $x \mapsto \begin{cases} \ln(|x|) + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(|x|) + C_2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

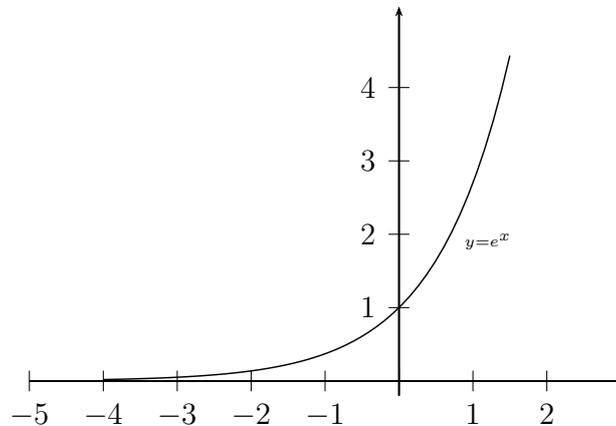
1.2 Fonction exponentielle**Définition 1.4 (Exponentielle)**

La fonction exponentielle \exp et la fonction réciproque du logarithme népérien. Son domaine de définition est \mathbb{R} et son image est \mathbb{R}_+^* .

Proposition 1.5 (Propriétés élémentaires de \exp)

1. Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $\ln(\exp(y)) = y$, $\exp(\ln(x)) = x$ et \exp est strictement positive.
2. La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est strictement croissante, dérivable et $\exp' = \exp$.
3. $\exp(0) = 1$.
4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$ et $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$.
5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(na) = (\exp(a))^n$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\exp(x) \geq x + 1$.
7. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Voici le graphe de la fonction exponentielle.



Définition 1.6 (e)

1. On définit le réel e par $e = \exp(1)$. Autrement dit, e est l'unique antécédent de 1 par \ln : $\ln(e) = 1$.
2. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ le réel e^x par : $e^x = \exp(x)$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit le réel a^x par $a^x = e^{x \ln(a)}$.

Remarque.

On utilise souvent en informatique le logarithme en base 2, et en physique le logarithme en base 10.

Le logarithme en base 2, noté \ln_2 , est défini sur \mathbb{R}_+^* par $\ln_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Il vérifie les mêmes propriétés que le logarithme usuel, à ceci près que $\ln_2(2) = 1$, et donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln_2(2^x) = x$.

Le logarithme en base 10, noté en général \log , est défini sur \mathbb{R}_+^* par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$. Il vérifie les mêmes propriétés que le logarithme usuel, à ceci près que $\log(10) = 1$, et donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\log(10^x) = x$.

2 Fonctions puissances

On connaît déjà les fonctions $x \mapsto x^n$ si $n \in \mathbb{N}$, définies sur \mathbb{R} . On connaît aussi les fonctions $x \mapsto x^n$ si $n \in \mathbb{Z}$, définies sur \mathbb{R}^* . On connaît aussi les fonctions $x \mapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ lorsque $n \in \mathbb{Z}^*$, définies sur \mathbb{R}_+ si n est pair, sur \mathbb{R} si n est impair : ce sont les fonctions réciproques des précédentes : on utilise le théorème de la bijection.

On voudrait maintenant définir une fonction $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 2.1 (Fonctions puissances)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction *puissance* $a^{\text{àme}}$ est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}. \end{array}$$

Proposition 2.2

Pour tous $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $\ln(x^y) = y \ln(x)$.

Proposition 2.3 (Propriétés élémentaires)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

2. La fonction puissance α -ème est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$.

3. Pour $\alpha \neq -1$, une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur \mathbb{R}_+^* est la fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

4. Si $\alpha < 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0,$$

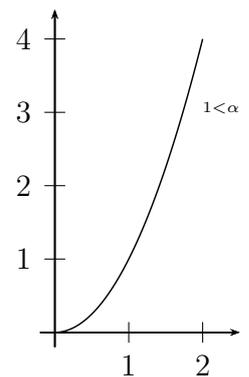
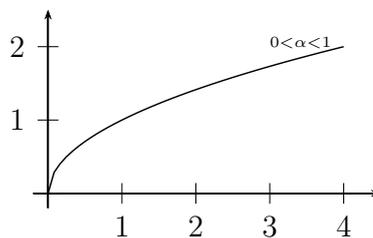
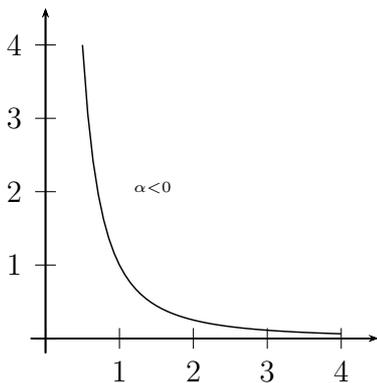
et réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* .

5. Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty,$$

et réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* .

Voici les graphes des fonctions puissances.

**Remarques.**

- Bien entendu, si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction puissance n -ème se prolonge à \mathbb{R} , comme rappelé au début du paragraphe.
- Pour $\alpha = 0$, on obtient la fonction constante égale à 1, et pour $\alpha = 1$, la fonction identité de \mathbb{R} .
- Il ne faut pas confondre les fonctions $x \mapsto x^y$ (fonction puissance sur \mathbb{R}_+^*) et $y \mapsto x^y$ (fonction exponentielle définie sur \mathbb{R} pour $x > 0$).

Proposition 2.4

1. Si $0 < \alpha$, $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$.
2. Si $0 < \alpha < 1$, le graphe de $x \mapsto x^\alpha$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
3. Si $1 < \alpha$, le graphe de $x \mapsto x^\alpha$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Proposition 2.5 (Fonction réciproque)

Soit $\alpha \neq 0$. La fonction réciproque de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto x^{1/\alpha}$.

3 Croissances comparées

Proposition 3.1 (Croissances comparées 1)

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x = 0$.

Proposition 3.2 (Croissances comparées 2)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0.$$

Proposition 3.3 (Croissances comparées 3)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha = 0.$$

4 Fonctions circulaires réciproques

4.1 Définitions

Proposition 4.1

Les fonctions

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1], \quad \cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1], \quad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

sont bijectives.

Méthode 4.2

En particulier, on a :

1. Si $a, b \in [0, \pi]$, $a = b \iff \cos(a) = \cos(b)$.
2. Si $a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $a = b \iff \sin(a) = \sin(b)$.

3. Si $a, b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $a = b \iff \tan(a) = \tan(b)$.

C'est très utile pour résoudre des équations. Et facilement vérifiable sur un cercle trigonométrique.

Définition 4.3 (Fonctions circulaires réciproques)

Les fonctions

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi], \quad \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

sont les fonctions réciproques respectives des bijections de la proposition 4.1.

Proposition 4.4

Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\arccos(x)$ est l'unique angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus est x .
2. $\cos(\arccos(x)) = x$.
3. $\arccos(\cos(\theta)) = \theta \iff \theta \in [0, \pi]$.

Proposition 4.5

Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\arcsin(x)$ est l'unique angle de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus est x .
2. $\sin(\arcsin(x)) = x$.
3. $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta \iff \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Proposition 4.6

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

1. $\arctan(x)$ est l'unique angle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est x .
2. $\tan(\arctan(x)) = x$.
3. $\arctan(\tan(\theta)) = \theta \iff \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Remarques.

1. Attention, $\arctan \neq \frac{\arcsin}{\arccos}$.
2. En général,

$$\arcsin(\sin(a)) \neq a, \quad \arccos(\cos(a)) \neq a, \quad \arctan(\tan(a)) \neq a.$$

Par exemple, si $a \in [\pi/2, 3\pi/2]$, alors $\sin(u) = \sin(a)$ et $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ impose $u = \pi - a$ et donc $\arcsin(\sin(a)) = \pi - a$.

Proposition 4.7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arcsin(\sin(\theta)) = \begin{cases} \theta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \pi - \theta + 2k\pi \end{cases}$.

Proposition 4.8

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arccos(\cos(\theta)) = \begin{cases} \theta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ -\theta + 2k\pi \end{cases}$.

Proposition 4.9

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arctan(\tan(\theta)) = \theta + k\pi$.

Méthode 4.10 (Déterminez $\arccos(\cos(\theta))$, $\arcsin(\sin(\theta))$, $\arctan(\tan(\theta))$)

On place sur un cercle trigonométrique, suivant le cas, $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ ou $\tan(\theta)$. Puis :

1. Pour $\arccos(\cos(\theta))$, on détermine dans le cercle trigonométrique l'unique angle $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$: on a $\alpha = \arccos(\cos(\theta))$. Pour cela, on enlève ou on ajoute un certain nombre de fois 2π à θ pour obtenir un angle entre $-\pi$ et π . S'il est entre 0 et π , c'est l'arccosinus cherché, sinon c'est l'opposé.
2. Pour $\arcsin(\sin(\theta))$, on détermine dans le cercle trigonométrique l'unique angle $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\alpha) = \sin(\theta)$: on a $\alpha = \arcsin(\sin(\theta))$. Pour cela, on enlève ou on ajoute un certain nombre de fois 2π à θ pour obtenir un angle entre $-\pi/2$ et $3\pi/2$. S'il est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, c'est l'arcsinus cherché, sinon c'est π moins l'angle obtenu.
3. Pour $\arctan(\tan(\theta))$, on détermine dans le cercle trigonométrique l'unique angle $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\alpha) = \tan(\theta)$: on a $\alpha = \arctan(\tan(\theta))$. Pour cela, on enlève ou on ajoute un certain nombre de fois π à θ .

Ensuite, on justifie avec des phrases. Par exemple pour le cosinus, on peut écrire : Soit $\alpha = \dots$. Alors $\alpha \in [0, \pi]$, et $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$ car ... (à justifier), donc $\alpha = \arccos(\cos(\theta))$.

Proposition 4.11 (Symétries)

Les fonctions arcsin et arctan sont impaires, et pour $x \in [-1, 1]$, on a $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$, autrement dit, le graphe de \arccos est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, \pi/2)$.

4.2 Dérivation des fonctions circulaires réciproques**Proposition 4.12**

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Proposition 4.13 (Dérivation des fonctions circulaires réciproques)

1. La fonction arcsinus est dérivable sur $] - 1, 1[$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. La fonction arccosinus est dérivable sur $] - 1, 1[$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. La fonction arctangente est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Proposition 4.14 (Tangentes remarquables)

1. Le graphe de arcsin admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x$, et des tangentes verticales au point d'abscisse ± 1 .
2. Le graphe de arccos admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = -x + \frac{\pi}{2}$, et des tangentes verticales au point d'abscisse ± 1 .
3. Le graphe de arctan admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x$.

Proposition 4.15 (Asymptotes)

Le graphe de arctan admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ (resp. $y = -\frac{\pi}{2}$) quand $x \rightarrow +\infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$).

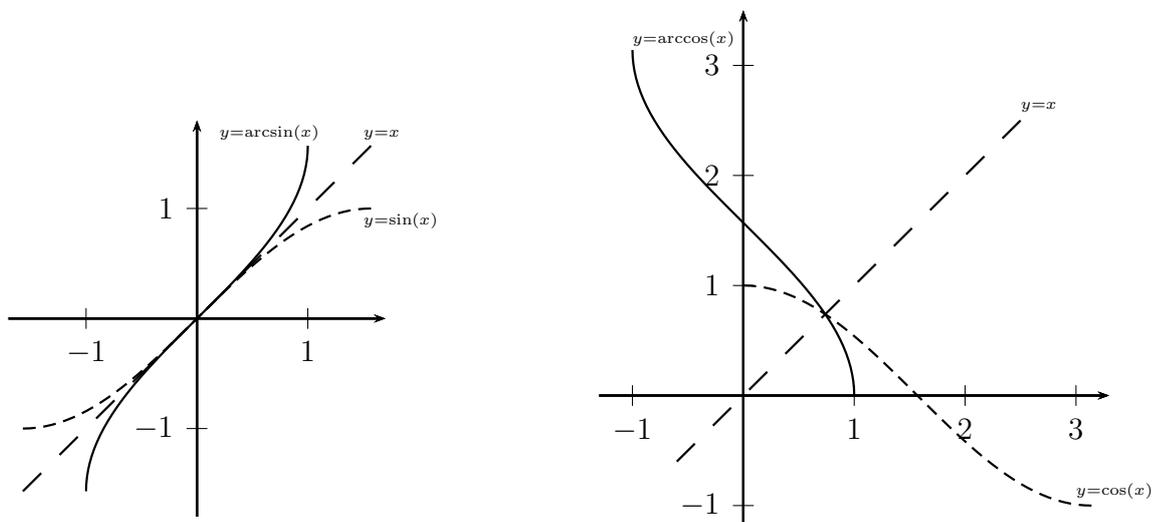
On en déduit les tableaux de variations :

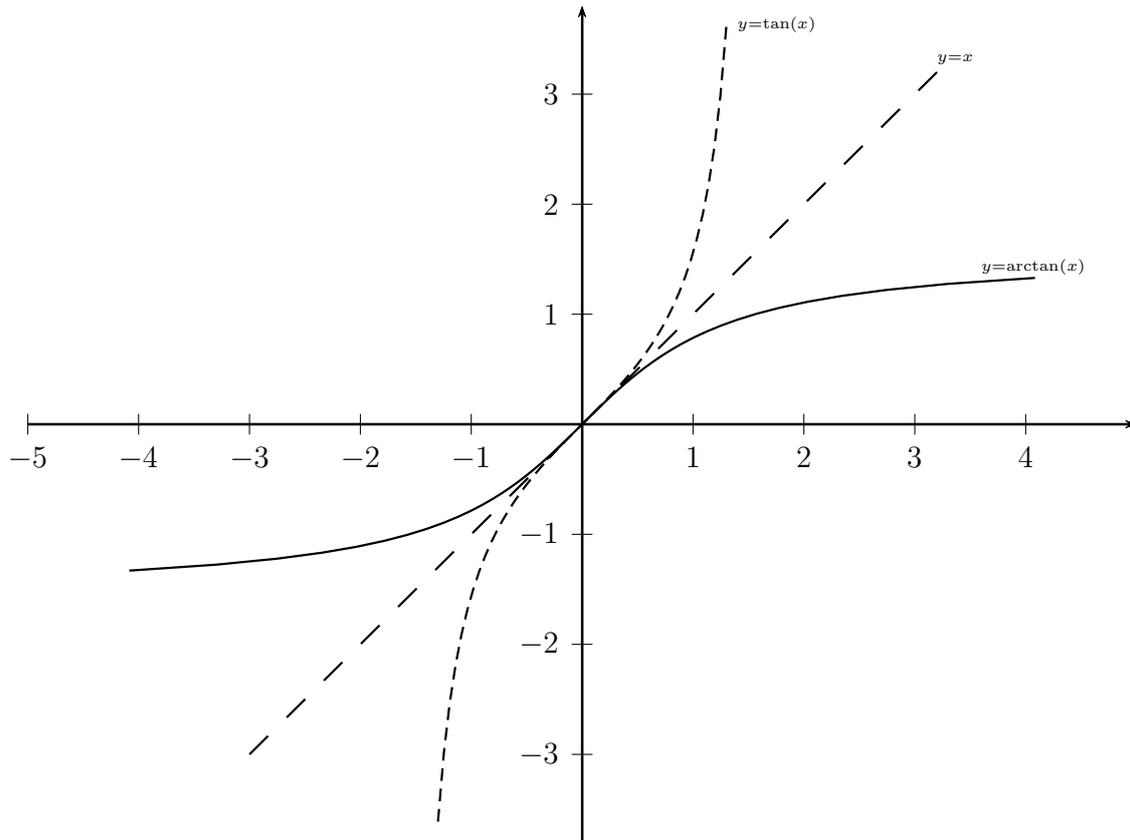
x	-1	0	1
$\arcsin'(x)$		+ 1 +	
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow 0$	$\searrow \frac{\pi}{2}$

x	-1	0	1
$\arccos'(x)$		- -1 -	
$\arccos(x)$	π	$\searrow \frac{\pi}{2}$	$\nearrow 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan'(x)$		+ 1 +	
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow 0$	$\searrow \frac{\pi}{2}$

Voici également les graphes de ces fonctions, avec en pointillés ceux de cos, sin et tan. Rajoutez les tangentes remarquables et les asymptotes.





4.3 Propriétés diverses

Proposition 4.16

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$xy = 1 \iff \arctan(x) + \arctan(y) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Proposition 4.17

1. Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 4.18

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$. De plus, un tel x est unique à 2π près.

5 Fonctions hyperboliques

Définition 5.1 (Définition des fonctions hyperboliques)

Les fonctions *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique*, notées respectivement sh, ch et th, sont définies sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Proposition 5.2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Proposition 5.3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(x) \geq 1$ et $-1 < \text{th}(x) < 1$.

Proposition 5.4

1. La fonction cosinus hyperbolique est paire et les fonctions sinus et tangente hyperboliques sont impaires.
2. Ces trois fonctions sont dérivables sur \mathbb{R} et on a

$$\text{sh}' = \text{ch}, \quad \text{ch}' = \text{sh}, \quad \text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}.$$

3. Les fonctions sinus et tangente hyperboliques sont strictement croissantes sur \mathbb{R} , et la fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .
4. Ces trois fonctions admettent des limites en $\pm\infty$ et on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) &= -1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) &= 1. \end{aligned}$$

Proposition 5.5 (Tangentes remarquables)

1. La fonction sh admet une tangente d'équation $y = x$ au point d'abscisse 0.
2. La fonction ch admet une tangente horizontale d'équation $y = 1$ au point d'abscisse 0.
3. La fonction th admet une tangente d'équation $y = x$ au point d'abscisse 0.

Proposition 5.6 (Asymptotes)

Le graphe de th admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ (resp. $y = -1$) quand $x \rightarrow +\infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$).

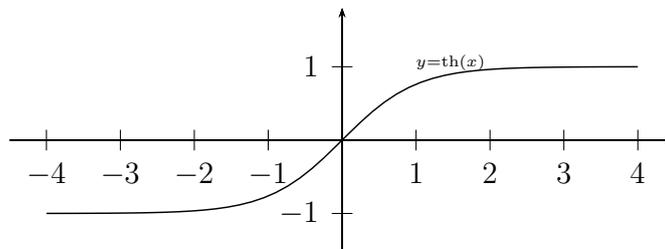
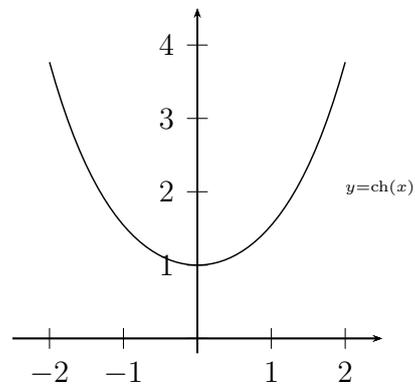
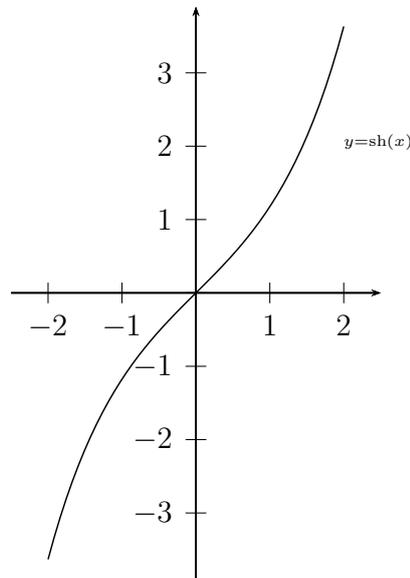
Voici les tableaux de variations de ces fonctions.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$		$+$	$+$
$\text{sh}(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x)$		$-$	$+$
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{th}'(x)$		$+$	$+$
$\text{th}(x)$	-1	0	1

Voici les graphes. Rajoutez les tangentes remarquables et les asymptotes.



Remarque.

Les fonctions hyperboliques paramètrent les hyperboles. En effet, la courbe paramétrée donnée par $x(t) = \text{ch}(t)$ et $y(t) = \text{sh}(t)$ est une branche d'une hyperbole équilatère, car $x^2(t) - y^2(t) = 1$.

Proposition 5.7

Les fonctions

$$\text{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{ch} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty[, \quad \text{th} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$$

sont bijectives.

Remarque.

On notera bien que si sh et th sont injectives sur \mathbb{R} , la fonction ch ne l'est que sur \mathbb{R}_+ .