Chapitre 7

Calculs d'intégrales sans construction

Dans ce chapitre, nous allons apprendre les différentes techniques de calcul d'intégrales et l'utilisation des différents théorèmes de l'intégration, en se basant sur les connaissances de terminale. La construction d'une intégrale sera faîte plus tard.

1 Définitions

Dans tout ce paragraphe, I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1.1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 1.1 (Primitive)

Soit f une fonction continue sur I. Une primitive de f sur I est une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

Définition 1.2 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I est une fonction dérivable sur I dont la dérivée est continue. On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

Remarques.

1. Il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue, comme par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$, et 0 sinon.
2. Il ne faut donc pas confondre les deux affirmations suivantes : "une fonction dérivable est continue" (toujours vrai) et "la dérivée d'une fonction est continue" (pas toujours le cas).
3. On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs complexes.
4. On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs complexes, et $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I, à valeurs réelles.

Théorème 1.3 (Existence d'une primitive)

Une fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Proposition 1.4

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$, et F une primitive de f sur I.

1. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto F(x) + k$ est une primitive de f sur I.
2. Si G est une primitive de f sur I, alors $F - G$ est constante.
3. L'ensemble des primitives de f sur I est $\{x \longmapsto F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème 1.5 (Lien primitive-intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $(a, b) \in I^2$.

1. La fonction
$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$
est l'unique primitive de f s'annulant en a.
2. Soit F une primitive de f sur I. Alors
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Remarques.

1. Ce théorème sert de deux façons différentes. Il dit que pour avoir une primitive, il suffit de travailler avec une intégrale (on définit des fonctions à l'aide de l'outil "intégrale". Il dit aussi que pour calculer une intégrale, il suffit de connaître une primitive.
2. La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et sa dérivée est f.

Proposition 1.6 (Intégrale d'une constante)

Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{d}x = \lambda(b - a)$.

Proposition 1.7 (Intégrale de la dérivée d'une fonction de classe C^1)

Soient $f \in \mathcal{C}^1(I)$, et $a \in I$. Alors
$$\forall\, x \in I,\ f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 1.8 (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$, et $a, b, c \in I$. Alors

1. $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t.$

2. $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0.$

3. $\displaystyle\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 1.9 (Linéarité de l'intégrale)

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$, $a, b \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 1.10

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \longrightarrow I$ une fonction dérivable. La fonction

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est dérivable et sa dérivée est la fonction

$$x \longrightarrow f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Méthode 1.11

Pour dériver $\displaystyle\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$, on écrit l'intégrale sous la forme $\displaystyle\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t$.

2 Fonctions à valeurs complexes

Il n'y a pas de différence avec ce que l'on vient de voir. Rappelons juste qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ s'écrit

$$f(x) = \mathrm{Re}(f)(x) + i\mathrm{Im}(f)(x),$$

que f est continue sur I si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont, de même pour la dérivabilité et

$$f' = \mathrm{Re}(f)' + i\mathrm{Im}(f)',$$

et par définition on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\mathrm{d}t.$$

3 Méthodes d'intégration

Méthode 3.1 (Comment calculer une primitive à l'aide du calcul intégral)

Pour calculer une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I, on fixe $a \in I$, et on prend une variable $x \in I$. On calcule alors l'intégrale (à x fixé) $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ par les méthodes qui suivent. La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est alors une primitive de f.

Proposition 3.2

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J, et g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. Soient $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b g'(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = g(f(b)) - g(f(a)).$$

Méthode 3.3

Voici des cas particuliers fréquents de la proposition 3.2. Ici, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.

1. Les primitives de $x \longmapsto f(x)^a f'(x)$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{f(x)^{a+1}}{a+1}$ + cste si $a \neq -1$.
2. Les primitives de $x \longmapsto (ax+b)^n$ sont les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$, avec $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$.
3. Les primitives de $x \longmapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$ sont les fonctions $x \longmapsto \ln|f(x)|$ + cste
4. Les primitives de $x \longmapsto \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$ sont les fonctions $x \longmapsto \arctan(f(x))$ + cste
5. Les primitives de $x \longmapsto \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ sont les fonctions $x \longmapsto \arcsin(f(x))$ + cste

Proposition 3.4 (Intégration par parties)

Soient $f, g \in C^1(I)$, et $a, b \in I$.

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

où $\big[f(t)g(t)\big]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Proposition 3.5 (Changement de variable)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$. Soient φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ où $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ et $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

Remarque.

Ici, on peut avoir $a < b$ ou $b < a$, et de même $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.

Méthode 3.6 (Rédaction d'un changement de variable)

On veut calculer $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par un changement de variable. On distingue deux cas :

1. **On exprime l'ancienne variable en fonction de la nouvelle.** Ce type de changement de variable intervient en général par des techniques apprises en cours. On rédige de la façon suivante (voir l'exemple **??**) :

On effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$. Les nouvelles bornes sont $\alpha = \cdots$ et $\beta = \cdots$ tels que $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (en général on choisit α et β pour que φ soit strictement monotone sur $[\alpha, \beta]$). φ est de classe C^1 sur $[\alpha\beta]$, et $f(\varphi(u))$ est défini pour tout $u \in [\alpha, \beta]$ (en général, on se contente de vérifier que $\varphi([\alpha, \beta] \subset [a, b])$. On a $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$, et donc $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$.

On remplace en fait dans l'intégrale t par $\varphi(u)$ pour obtenir la nouvelle intégrale.

2. **On exprime la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.** Ce type de changement de variable intervient quand on veut prendre une partie de la fonction à intégrer (la partie qui pose problème) comme nouvelle variable, pour simplifier. Parfois, on doit également exprimer l'ancienne variable en fonction de la nouvelle. Pour cela, on résout en général une équation. On rédige de la façon suivante (voir l'exemple **??**) :

On pose $u = \psi(t)$. Les nouvelles bornes sont $\alpha = \psi(a)$ et $\beta = \psi(b)$ (en général ψ est strictement monotone sur $[a, b]$). Soit $u \in [\alpha, \beta]$. Si nécessaire, on résout l'équation $u = \psi(t)$ d'inconnue $t \in [a, b]$. On obtient $t = \varphi(u)$. On vérifie que soit ψ, soit φ est de classe $\mathcal{C}^1$. On continue alors comme dans le cas précédent.

4 Primitives des fonctions usuelles

Dans tout ce qui suit, $\displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ désigne **une** primitive de la fonction continue f.

Proposition 4.1 (Les primitives classiques)

Voici pour les fonctions usuelles **une** primitive sur un intervalle où la fonction est continue. Il faut les connaître.

1. $\displaystyle\int^x t^a\mathrm{d}t = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \text{cste si } a \neq -1$
2. $\displaystyle\int^x e^{\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + \text{cste}\ , \lambda \in \mathbb{C}^*$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} = \tan(x) + \text{cste}$
4. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \ln|x-a| + \text{cste}$
5. $\displaystyle\int^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t = \ln|f(x)| + \text{cste}$
6. $\displaystyle\int^x \ln(t)\mathrm{d}t = x\ln(x) - x + \text{cste}$
7. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^2(t)} = \mathrm{th}(x) + \text{cste}$
8. $\displaystyle\int^x f^n(t)f'(t)\mathrm{d}t = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + \text{cste}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Méthode 4.2 (Les techniques classiques)

Voici quelques techniques usuelles à connaître (pas le résultat, la technique).

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2-t^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + \text{cste},\ a \neq 0$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cste},\ a \neq 0.$

3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cste},\ a > 0$

Méthode 4.3 (Polynôme-exponentielle)

Soit P est une fonction polynomiale et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto P(x)e^{\lambda x}$ (ou on cherche à intégrer une telle fonction).

1. On peut procéder par intégrations par parties successives, en dérivant la fonction polynomiale et en intégrant l'exponentielle, jusqu'à aboutir à une fonction polynomiale constante.

2. On peut rechercher une primitive sous la forme $x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une fonction polynomiale de même degré que P. On dérive, et on détermine les coefficients de Q par identification.

Méthode 4.4 ((co)sinus-exponentielle)

On cherche une primitive de $x \longmapsto \sin(ax)e^{\lambda x}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ (ou $x \longmapsto \cos(ax)e^{\lambda x}$) (ou on veut calculer une intégrale).

1. On peut intégrer par parties deux fois (en dérivant deux fois la fonction trigonométrique, ou deux fois l'exponentielle, mais ne pas changer en cours de route). On aboutit à une relation vérifiée par la primitive cherchée.

2. On peut chercher une primitive sous la forme $x \longmapsto (u\sin(ax) + v\cos(ax))e^{\lambda x}$, où $u, v \in \mathbb{R}$ sont à déterminer par identification en dérivant la fonction.

3. On peut écrire que $\sin(ax)e^{\lambda x} = \operatorname{Im}\left(e^{(\lambda+ia)x}\right)$, donc une primitive sera la partie imaginaire d'une pimitive de $x \longmapsto e^{(\lambda+ia)x}$.

Méthode 4.5 (Les fractions $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$)

Voici les méthodes pour intégrer $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Il y a trois cas :

1. ax^2+bx+c a une racine réelle double.
2. ax^2+bx+c a deux racines réelles distinctes.
3. ax^2+bx+c n'a pas de racine réelle.

La première chose à faire est donc de déterminer dans quel cas on est. Puis on procède comme dans les exemples qui suivent :

1. On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3x^2-12x+12}\mathrm{d}x$. Or, $3x^2-12x+12 = 3(x^2-4x+4) = 3(x-2)^2$, et donc

$$\int_0^1 \frac{1}{3x^2-12x+12}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{x-2}\right]_0^1 = \cdots$$

2. On veut calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{7x^2+13x-2}\mathrm{d}x$. Le discriminant de $7x^2+13x-2$ est 225, donc il y a deux racines réelles distinctes, et ce sont -2 et $\frac{1}{7}$. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2; \frac{1}{7}\right\},\ \frac{1}{7(x+2)(x-1/7)} = \frac{\lambda}{x+2} + \frac{\mu}{x-1/7}.$$

On réduit au même dénominateur et on identifie les coefficients pour obtenir λ et μ :

$$\frac{\lambda}{x+2}+\frac{\mu}{x-1/7}=\frac{(\lambda+\mu)x+2\mu-\lambda/7}{(x+2)(x-1/7)}=\frac{1/7}{(x+2)(x-1/7)},$$

(attention au 7 en facteur au dénominateur !!) et donc $\lambda+\mu=0$ et $2\mu-\lambda/7=\frac{1}{7}$, donc $\mu=\frac{1}{15}=-\lambda$, et finalement

$$\int_1^2 \frac{1}{7x^2+13x-2}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\frac{\lambda}{x+2}+\frac{\mu}{x-1/7}\right)\mathrm{d}x=\Big[\lambda\ln(|x+2|)+\mu\ln\left(|x-1/7|\right)\Big]_1^2=\cdots$$

3. On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{5x^2+x+2}\mathrm{d}x$. Le discriminant de $5x^2+x+2$ est <0, donc il n'y a pas de racine réelle. On va mettre $5x^2+x+2$ sous la forme $5(u^2+1)$. On procède ainsi :

   (a) On met $5x^2+x+2$ sous forme canonique :

   $$5x^2+x+2=5(x^2+x/5+2/5)=5\Big((x+1/10)^2-(1/10)^2+2/5\Big)=5\Big((x+1/10)^2+39/100\Big),$$

   (b) On factorise par $39/100$ pour faire apparaître un $(\cdots)^2+1$:

   $$5\Big((x+1/10)^2+39/100\Big)=\frac{5\times 39}{100}\left(\frac{100}{39}(x+1/10)^2+1\right)=\frac{39}{20}\left(\left(\frac{10x+1}{\sqrt{39}}\right)^2+1\right).$$

   (c) On obtient finalement

   $$\int_0^1\frac{1}{5x^2+x+2}\mathrm{d}x=\frac{20}{39}\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{10x+1}{\sqrt{39}}\right)^2+1}\mathrm{d}x=\frac{20}{39}\left[\arctan\left(\frac{10x+1}{\sqrt{39}}\right)\right]_0^1\times\frac{\sqrt{39}}{10}=\cdots$$

Méthode 4.6 (Les fractions $\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$)

Voici les méthodes pour intégrer $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, où $a,b,c,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $a,\alpha\neq 0$. On explique la méthode avec l'exemple de $\dfrac{4x-3}{5x^2+x+2}$:

1. On commence par éliminer le terme $4x$ du numérateur à l'aide de la dérivée du dénominateur :

   $$4x-3=\frac{4}{10}(10x^2+1)-\frac{4}{10}-3=\frac{2}{5}(10x^2+1)-\frac{17}{5},$$

   et donc

   $$\frac{4x-3}{5x^2+x+2}=\frac{2}{5}\frac{10x^2+1}{5x^2+x+2}-\frac{17/5}{5x^2+x+2}.$$

2. Le premier terme est de la forme $f'(x)/f(x)$ qui s'intègre avec un logarithme, et le deuxième s'intègre grâce à la méthode 4.5.

Méthode 4.7 (Les fractions $\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{ax^2+bx+c}$)

Voici les méthodes pour intégrer $\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{ax^2+bx+c}$, où $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $a,\alpha\neq 0$. On explique la méthode avec l'exemple de $\dfrac{3x^2-2x+6}{5x^2+x+2}$:

1. Tout d'abord on élimine le $3x^2$ du numérateur à l'aide du dénominateur :
$$3x^2 - 2x + 6 = \frac{3}{5}(5x^2 + x + 2) - \frac{3}{5}(x + 2) - 2x + 6 = \frac{3}{5}(5x^2 + x + 2) + (-13/5)x + 24/5,$$
ce qui donne
$$\frac{3x^2 - 2x + 6}{5x^2 + x + 2} = \frac{3}{5} + \frac{(-13/5)x + 24/5}{5x^2 + x + 2}$$
2. On est ramené à intégrer une constante, et à utiliser la méthode 4.6 pour la fraction qui reste.

Méthode 4.8 (Polynômes en sinus et cosinus)

Pour intégrer une fonction du type
$$x \longmapsto \sin^n(x)\cos^m(x) \quad n, m \geqslant 0,$$
on effectue le changement de variables $u = \sin(x)$ si m est impair, $u = \cos(x)$ si n est impair. Sinon, soit on linéarise, soit on cherche une formule de récurrence.

5 Compétences

1. Savoir dériver une fonction définie par une intégrale (variable aux bornes ou dans l'intégrale).
2. Savoir majorer une intégrale, par exemple dans le cas d'une intégrale dépendant d'un paramètre, pour montrer qu'elle tend vers 0.
3. Savoir utiliser l'intégration par parties.
4. Savoir utiliser le changement de variables, en particulier en proposer une rédaction claire.
5. Savoir quelle technique utiliser pour calculer des primitives classiques.