Algèbre - Chapitre 3

Calcul algébrique : sommes et produits

I Généralités

1) Rappels sur la somme et le produit

a) Addition :

Considérons l'opération d'addition chez les nombres réels (ou complexe).

Propriété 1 :
Soient x et y deux réels (ou complexes). On a :
(i) $x + y = y + x$: on dit que l'addition de deux réels est commutative.
(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$: on dit que l'addition est associative.
(iii) $x + 0 = x$: on dit que le nombre 0 est neutre pour "+".

Ces deux propriétés permettent de faire des sommes assez librement chez les nombres réels, puisque l'on peut alors choisir l'ordre de calcul.

Exemple :
Soit $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$.
Par commutativité : $S = 1 + 9 + 2 + 8 + 3 + 7 + 4 + 6 + 5$
Et par associativité : $S = (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 = 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 45$

b) Produit :

Ces propriétés se retrouvent également pour le produit de réels :

Propriété 2 :
Pour tous réels (ou complexes) x et y, on a
(i) $xy = yx$ (commutativité)
(ii) $(xy)z = x(yz)$ (associativité)
(iii) $x \times 1 = x$ (1 est neutre pour la multiplication)

Propriété 3 : Distributivité
Pour tout réels x, y et z, on a
$$x(y + z) = xy + xz$$

C'est cette propriété qui permet la factorisation et le développement d'expressions.

2) Symboles $\sum$ et $\prod$

a) Définitions :

Définition :

- Soit I un ensemble fini et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels (ou complexes).
  On note $\sum\limits_{i\in I}^{n} x_i$ la somme de tous ces nombres, et $\prod\limits_{i\in I} x_i$ leur produit.
- Par convention, si $I = \emptyset$, on pose $\sum\limits_{i\in I}^{n} x_i = 0$ et $\prod\limits_{i\in I} x_i = 1$

A noter : **CAS FRÉQUENT**

Très souvent, on aura I de la forme $I = [\![p, n]\!]$ avec p et n deux entiers naturels, $p < n$.

On écrira alors $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i=p}^{n} x_i$ et $\prod_{i \in I} x_i = \prod_{i=p}^{n} x_i$

Autrement dit : $\sum_{i=p}^{n} x_i = x_p + x_{p+1} + \ldots x_n$ et $\prod_{i=p}^{n} x_i = x_p x_{p+1} \ldots x_n$

Ces écritures avec "..." sont appelées "écritures en extension".

Exemples :

- $\sum_{i \in \{0;2;4\}} i =$
- $\sum_{i=1}^{3} i^2 =$
- $\prod_{i=1}^{3} (i+1) =$
- $\prod_{i=1}^{10000} 1 =$
- $\sum_{i=1}^{10000} 1 =$

REMARQUES :

1. Les notations $\sum$ et $\prod$ pourront être utilisées dans n'importe quel ensemble où la somme (respectivement le produit) est commutatif (fonctions, suites, etc...)
2. On utilisera également des écritures donnant des propriétés des indices considérés. Par exemple :
$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq 10 \\ i \text{ pair}}} i = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

b) Factorielle :

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle de n, noté $n!$ le nombre défini par

(i) $0! = 1$

(ii) $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ si $n \geq 1$.

Exemples

- $4! =$
- $6! =$

Propriété 4 :

Soit $n \geq 1$, alors $n! = n \times (n-1)!$

▷ *Preuve* :

◁

En corollaire immédiat, on montre facilement :

Propriété 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.

3) Calcul avec les symboles $\sum$ et $\prod$:

a) Règles de calculs pour les sommes et produits finis

Une somme ou un produit décrit sous la forme $\sum$ ou $\prod$ se manipule comme une somme ou un produit habituelle. On peut en particulier factoriser grâce à la distributivité, partager en deux sommes ou produits via l'associativité, etc.

Propriété 6 :

soit I un ensemble d'indices fini à $p > 0$ éléments. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels (ou complexes) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\in \mathbb{C}$).
Alors

- $\displaystyle\sum_{i\in I}(x_i+y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$
- $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i$
- $\displaystyle\prod_{i\in I}(x_i y_i) = \prod_{i\in I} x_i \times \prod_{i\in I} y_i$
- $\displaystyle\prod_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda^p \prod_{i\in I} x_i$

Exemples :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 4x_k = 4\sum_{k=0}^{10} x_k$: on a factorisé par 4.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n2^k =$

Remarques :

- Il faut bien prendre le temps au sein d'une somme de repérer ce qui dépend de k et ce qui n'en dépend pas. Factoriser peut alors gagner beaucoup de temps.
- Pour les produits, le comportement est différent, par exemple :

$$\prod_{i=1}^{3}(4i) \neq 4\prod_{i=1}^{3} i \text{ mais vaut } 4^3\prod_{i=1}^{3} i$$

b) "Glissement" d'indice

Le i de la définition peut-être remplacé par n'importe quelle lettre qui n'est pas déjà utilisée, sans changer le sens de la somme. On dit que i est une variable muette.

Ainsi, par exemple $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{j=1}^{n} x_j$. Par contre, l'écriture $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} x_n$ n'a aucun sens...

Comme ce qui dépend de i n'est qu'une façon de noter, on peut faire des "changements de variables" par glissement des indices :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} x_{k-1} = x_0 + \ldots x_4 = \sum_{j=0}^{4} x_j$: ici, tout se passe comme si $j = k-1$.

Méthode : **GLISSEMENT D'INDICE**

Soit une somme de la forme $\sum_{k=p}^{n} x_k$ dont ont veut faire glisser l'indice d'une quantité a.

- Première étape : on écrit le changement voulu $i = k + a$
- Deuxième étape : on calcule les nouvelles bornes : quand k vaut p (borne du bas), i vaut $p + a$, quand k vaut n (borne du haut), i vaut $n + a$.
- Troisième étape : on écrit k en fonction de i ($k = i - a$) et on remplace.

Cette méthode fonctionne également pour les produits.

Exemples

- $\prod_{k=3}^{5}(k-2)$
- $\sum_{k=2}^{5} x_{k-2}^{k}$

Danger ! **UNIQUEMENT DES GLISSEMENTS**

Les seuls changements de variables autorisés dans les sommes ou les produits sont les glissements, c'est à dire des "décalages" du type $i = k + a$ avec a entier relatif.
Des changements du style "$i = 2k$" sont impossibles.

c) Sommes telescopiques :

Proposition 1 :

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $x_k = a_{k+1} - a_k$.
Alors pour tous entiers $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p < n$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_p$$

De telles sommes sont appelées **sommes telescopiques**.

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

- $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - k^2 =$
- $\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) =$

II Sommes usuelles et formules...

1) Formulaire :

Propriété 7 :
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ (appelée *somme géométrique*)
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

▷ *Preuve* : On peut les faire par récurrence, ou avec des telescopages (cf TD) ◁

2) Coefficients binomiaux :

a) Définition :

Définition :

Soit k et n deux entiers, $n \geq 0$. On appelle coefficient binomial le nombre noté $\binom{n}{k}$ défini par

$$\begin{cases} \dbinom{n}{k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ ou } k > n \\ \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \text{ si } k \in [\![0, n]\!] \end{cases}$$

Exemple :

- $\binom{4}{2} =$
- $\binom{6}{3}$
- $\binom{4}{0} =$
- $\binom{12}{4}$

b) Propriétés immédiates

Propriété 8 :
Soient k et n deux entiers naturels avec $k \leq n$

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propriété dite de "symétrie")

(ii) et pour $k > 0$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ (propriété appelée "petite formule")

▷ *Preuve* :

◁

c) Triangle de Pascal

Proposition 2 : relation triangulaire de Pascal

Soient k et n deux entiers naturels avec $k \leq n$ alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Exemple :
La relation triangulaire de Pascal permet de calculer facilement les coefficients binomiaux, sans utiliser la définition, via un tableau appelé "triangle de Pascal" :

3) Généralisation des identités remarquables

a) Binôme de Newton

Proposition 3 : Formule du binôme de Newton.
Soit a et b deux nombres réels. Alors pour tout $n \geq 0$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

▷ *Preuve* :

$\triangleleft$

Exemples

- $(a+b)^2 =$
- soit $x \in \mathbb{R}$: $(x+1)^4 =$

b) Identité géométrique

Proposition 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\in \mathbb{C}$). Alors

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

exemples :

- $x^3 - y^3 =$

- $x^4 - 1 =$

III Sommes doubles

1) Définition :

a) Familles à indices doubles

Soient I et J deux ensembles finis. On parle de famille à **indice double** quand on considère une famille de nombres $(a_{i,j})$ avec $i \in I$ et $j \in J$.
On note alors $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ cette famille.

En particulier, si m et n deux entiers naturels non nuls et $a_{i,j}$ des nombres (complexes ou réels) dont les indices i et j sont des entiers tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on note cette famille

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

On peut la représenter dans un tableau :

Ainsi, i est le numero de ligne, j le numero de colonne. On gardera toujours cet ordre là en mathématiques et en informatique.

b) Somme double

Définition :

Soient I et J deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres à indice double.
On note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ la somme de tous ces nombres.
En particulier, si $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une famille de $m \times n$ nombres, on note la somme :

$$S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}$$

Exemple :
Considérons la somme $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}} ij$

Propriété 9 : Sommation par ligne, par colonne
Avec les notations précédentes, on a

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij})$$

▷ *Preuve* : Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on fait la somme des nombres sur la ligne numero i en posant $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. On ajoute ensuite toutes les lignes entre elles : $\sum_{i=1}^{m} L_i$: cela donne la première formule.
De même, on peut sommer sur les colonnes ($C_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$), puis on additionne tout : c'est la deuxième formule

◁

Exemple :
$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}} ij$

2) Variantes :

a) Sommes triangulaires :

Tout comme les sommes "simples", on peut mettre d'autres conditions sur les sommes doubles.
On parle ainsi de **sommes triangulaires** pour des sommes de la forme $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$

Exemple :
Soit $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} ij$

Comme pour les sommes doubles *rectangulaires*, on peut décomposer :

Propriété 10 : Sommation par ligne, par colonne
Avec les notations précédentes, on a

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=i}^{n} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{j} a_{ij})$$

Exemples :

- $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} ij$

- $\displaystyle\sum_{0 \leq i \leq j \leq 4} j2^i$

b) Et d'autres encore :

Bien sûr d'autres variantes sont possibles, avec des conditions différentes (ce ne sont plus des sommes dites triangulaires du coup) :

- $\displaystyle\sum_{0<i+j<4} ij$

- $\displaystyle\sum_{i+j=4} 2^i(-1)^j$