CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON 2 - Séries

Exercice 1

1. Si $z = 0$ alors tous les termes étant nuls à partir du rang $n = 1$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (absolument, précision utile pour la suite).
Soit maintenant $z \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{|z|^n}{n!} > 0$ et $\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1$, on en déduit par la règle de d'Alembert que la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ converge.
Ainsi, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument donc converge.
On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, \text{ la série } \sum \frac{z^n}{n!} \text{ converge (absolument).}}$$

2. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.
Les séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ convergent absolument d'après la question 1 donc par produit de Cauchy, la série $\sum w_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$, converge absolument et on a :

$$f(z)f(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+z')^n = f(z+z')$$

d'après la formule du binôme de Newton.
Ainsi :

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C},\ f(z+z') = f(z)f(z').}$$

3.(a) On constate que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.

⋆ Soit $x \in]0,1[$.
On a $\frac{f(x)-1}{x} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \geqslant 0$ comme somme de termes positifs donc $\frac{f(x)-1}{x} \geqslant 1$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant 1$ donc $\frac{x^n}{(n+1)!} \leqslant x^n$ (car $x \geqslant 0$).
Comme les séries $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $\sum x^n$ (série géométrique avec $|x| < 1$) convergent, on obtient par croissance de la somme :

$$\frac{f(x)-1}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ 1 \leqslant \frac{f(x)-1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x}}$$

⋆ Soit $x \in]-1,0[$.
On a $\frac{f(x)-1}{x} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{(n+1)!}$ car $x \leqslant 0$.
La série $\sum (-1)^n \frac{|x|^n}{(n+1)!}$ est alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{|x|^n}{(n+1)!} \geqslant 0$.

Comme la suite $\left(\dfrac{|x|^n}{(n+1)!}\right)$ tend vers 0 (car $|x|<1$) et est décroissante (car c'est le produit des suites $(|x|^n)$ et $\left(\dfrac{1}{(n+1)!}\right)$ qui sont décroissantes et positives), on obtient par le critère spécial des séries alternées que la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{|x|^n}{(n+1)!}$ est du signe de son premier terme c'est-à-dire négatif.
Ainsi, $\dfrac{f(x)-1}{x}-1\leqslant 0$ donc $\dfrac{f(x)-1}{x}\leqslant 1$.
De même, on a $\dfrac{f(x)-1}{x}-\left(1+\dfrac{x}{2}\right)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{|x|^n}{(n+1)!}\geqslant 0$ par le critère spécial des séries alternées.
On a donc :

$$\boxed{\forall x\in]-1,0[,\ 1+\frac{x}{2}\leqslant\frac{f(x)-1}{x}\leqslant 1.}$$

3.(b) On remarque que $f(0)=1$ donc $\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est le taux d'accroissement de f en 0.
On a pour tout $x\in]0,1[$, $1\leqslant\dfrac{f(x)-1}{x}\leqslant\dfrac{1}{1-x}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-x}=1$, par le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=1$.
On a pour tout $x\in]-1,0[$, $1+\dfrac{x}{2}\leqslant\dfrac{f(x)-1}{x}\leqslant 1$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\left(1+\frac{x}{2}\right)=1$, par le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-1}{x}=1$.
Par propriété des limites à droite et à gauche, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=1$.
Donc par définition :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en 0 et vérifie } f'(0)=1.}$$

4.(a) Pour tout $h\in\mathbb{R}^*$, on a en appliquant la question 2 :

$$\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}=\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=\boxed{f(x_0)\frac{f(h)-1}{h}}.$$

4.(b) Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Montrons que f est dérivable en x_0 et qu'on a $f'(x_0)=f(x_0)$.
On a vu que $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=1$ d'où par la question précédente : $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f(x_0)$.
Ceci prouve que la fonction f est dérivable en x_0 et qu'on a $f'(x_0)=f(x_0)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et elle vérifie } f'=f.}$$

4.(c) La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y'=y$ donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)=\lambda e^x$.
Comme $f(0)=1$, on en déduit que $\lambda=1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R}, \text{ on a } f(x)=e^x.}$$

5.(a) Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}-i=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^nx^n}{n!}-1}{x}-i=\frac{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^nx^n}{n!}}{x}-i=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^nx^{n-1}}{n!}-i=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{i^nx^{n-1}}{n!}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{i^{m+1}x^m}{(m+1)!}=i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^nx^n}{(n+1)!}$$

par le changement d'indice $m=n-1$.

$$\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R}^*,\ \frac{g(x)-g(0)}{x}-i=i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^nx^n}{(n+1)!}.}$$

5.(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x} - i\right| = \left|i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n x^n}{(n+1)!}\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n x^n}{(n+1)!}\right|.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant \left|\dfrac{i^n x^n}{(n+1)!}\right| = \dfrac{|x|^n}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}$ puisque $(n+1)! \geqslant n! > 0$ et $|x|^n \geqslant 0$.

Comme la série $\sum \dfrac{|x|^n}{n!}$ converge (d'après la question 1), on en déduit par comparaison par inégalité que la série $\sum \dfrac{i^n x^n}{(n+1)!}$ converge absolument.

Par inégalité triangulaire puis croissance, on en déduit alors que :

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x} - i\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n x^n}{(n+1)!}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^n}{(n+1)!} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n!} - 1 = e^{|x|} - 1.$$

On a ainsi prouvé :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{g(x)-g(0)}{x} - i\right| \leqslant e^{|x|} - 1.}$$

5.(c) Comme $\lim\limits_{x\to 0}(e^{|x|} - 1) = 0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = i$$

ce qui signifie par définition que :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = i.}$$

6.(a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ par la question 2 :

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{f(ix_0+ih)-f(ix_0)}{h} = \frac{f(ix_0)f(ih)-f(ix_0)}{h} = g(x_0)\frac{g(h)-1}{h}.$$

Or, on a vu que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-1}{h} = i$ puisque $g(0) = 1$.

On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = ig(x_0)$.

Ceci prouve que la fonction g est dérivable en x_0 et qu'on a $g'(x_0) = ig(x_0)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et elle vérifie } g' = ig.}$$

6.(b) La fonction g est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' = iy$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \lambda e^{ix}$.

Comme $g(0) = 1$, on en déduit que $\lambda = 1$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } g(x) = f(ix) = e^{ix}.}$$

7. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a par la question 2 :

$$f(z) = f(\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)) = f(\mathrm{Re}(z))f(i\mathrm{Im}(z)).$$

Comme $\mathrm{Re}(z))$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont des réels, on obtient par les questions 4.(c) et 6.(b) que :

$$f(\mathrm{Re}(z)) = e^{\mathrm{Re}(z)} \text{ et } f(i\mathrm{Im}(z)) = e^{i\mathrm{Im}(z)}.$$

Ainsi :

$$f(z) = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)} = e^z.$$

On a donc prouvé que :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} = e^z.}$$

Exercice 2

A.1.(a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u_n \sim v_n &\underset{\forall n\in\mathbb{N},\, v_n\neq 0}{\iff} \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\\
&\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0,\ \text{on a } \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon\\
&\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0,\ \text{on a } -\varepsilon \leqslant \frac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \varepsilon\\
&\underset{\forall n\in\mathbb{N},\, v_n>0}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0,\ \text{on a } -\varepsilon v_n \leqslant u_n - v_n \leqslant \varepsilon v_n\\
&\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0,\ \text{on a } v_n - \varepsilon v_n \leqslant u_n \leqslant \varepsilon v_n + v_n
\end{aligned}$$

d'où l'équivalence :

$$\boxed{u_n \sim v_n \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0,\ \text{on a } (1-\varepsilon)v_n \leqslant u_n \leqslant (1+\varepsilon)v_n}$$

A.1.(b) La série $\sum v_n$ converge par hypothèse et la série $\sum u_n$ converge par comparaison (car $u_n \sim v_n$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et la série $\sum v_n$ converge) donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommes $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ sont bien définies.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme on a $u_n \sim v_n$, on a par la question a) :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0,\ \text{on a } (1-\varepsilon)v_n \leqslant u_n \leqslant (1+\varepsilon)v_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geqslant n$, on a $k \geqslant n_0$ donc $(1-\varepsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\varepsilon)v_k$.
En sommant ces inégalités pour k allant de n à $+\infty$ (les séries en jeu convergent), on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

D'après a), on a ainsi établi :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k}$$

A.2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme f est décroissante sur $[n, n+1]$, on a pour tout $t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$.
Par croissance de l'intégrale (f est continue sur $[n, n+1]$), on en déduit :

$$f(n+1) = f(n+1)(n+1-n) = \int_n^{n+1} f(n+1)\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}t = f(n)(n+1-n) = f(n).$$

En multipliant par $-1 \leqslant 0$, on obtient :

$$-f(n) \leqslant -\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant -f(n+1)$$

donc en ajoutant $f(n)$, on obtient :

$$\boxed{0 \leqslant f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n) - f(n+1).}$$

A.2.(b) La série télescopique $\sum_{n\geqslant 1}\big(f(n) - f(n+1)\big)$ est de même nature de la suite $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Or, la suite $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0 puisque f est positive) donc elle converge.

On a donc :

$\star$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n) - f(n+1)$

$\star$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$

$\star$ La série $\sum_{n\geqslant 1}\big(f(n) - f(n+1)\big)$ converge.

Par comparaison, on en déduit :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ converge.}}$$

B.1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est définie sur $]0, +\infty[$, continue, positive et décroissante.

D'après A.2., la série $\sum\left(\dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t\right)$ converge. Notons γ la somme de cette série (γ est un réel).

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t\right) = \gamma$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = H_n - \int_1^{n+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \quad \text{par la relation de Chasles}\\ &= H_n - [\ln|t|]_1^{n+1} = H_n - \ln(n+1) = H_n - \ln n - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big).\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\big(H_n - \ln n\big) = \gamma$.

On a donc $H_n - \ln n = \gamma + o(1)$ d'où :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + o(1)}$$

B.2.(a) Par la question précédente, on a $u_n = o(1)$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

La série télescopique $\displaystyle\sum_{k\geqslant n}(u_k - u_{k+1})$ étant de même nature que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant n}(u_k - u_{k+1}) \text{ converge.}}$$

Par télescopage, on a de plus :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) = u_n - \lim_{k\to+\infty} u_k = u_n.}$$

B.2.(b)i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}u_n - u_{n+1} &= H_n - \ln(n) - \gamma - H_{n+1} + \ln(n+1) + \gamma = -\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\\ &= -\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}}$$

B.2.(b)ii. On sait que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2>1$) et on souhaite déterminer un équivalent du reste $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

- *Méthode 1 :* On utilise une comparaison série/intégrale.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$ donc on a :

$$\frac{1}{(k+1)^2}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\frac{1}{k^2}.$$

Soit $(n,N)\in\mathbb{N}^2$ avec $2\leqslant n\leqslant N$.
En sommant pour k allant de $n-1$ à $N-1$, on obtient :

$$\sum_{k=n-1}^{N-1}\frac{1}{(k+1)^2}\leqslant\sum_{k=n-1}^{N-1}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\sum_{k=n-1}^{N-1}\frac{1}{k^2}.$$

Or, on a :

$$\sum_{k=n-1}^{N-1}\frac{1}{(k+1)^2}=\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}\text{ par changement d'indice }\ell=k+1,$$

$$\sum_{k=n-1}^{N-1}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_{n-1}^{N}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_{n-1}^{N}=-\frac{1}{N}+\frac{1}{n-1}\text{ par la relation de Chasles.}$$

Ainsi, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}\leqslant-\frac{1}{N}+\frac{1}{n-1}\leqslant\sum_{k=n}^{N-1}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(n-1)^2}.$$

Comme la série $\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{k^2}$ converge, on obtient par passage à la limite $N\to+\infty$:

$$R_n\leqslant\frac{1}{n-1}\leqslant R_n+\frac{1}{(n-1)^2}\text{ ou encore }\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)^2}\leqslant R_n\leqslant\frac{1}{n-1}.$$

Comme $\frac{1}{n-1}\sim\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)^2}\sim\frac{1}{n}$ (puisque $-\frac{1}{(n-1)^2}=o\left(\frac{1}{n}\right)$), on en déduit par encadrement que :

$$\boxed{R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sim\frac{1}{n}.}$$

- *Méthode 2 :* On a $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n^2}>0$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge donc d'après A.1.(b), on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sim\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Or, par télescopage, on a pour tout $(n,N)\in(\mathbb{N}^*)^2$ avec $N\geqslant n$, $\sum_{k=n}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{N+1}$ donc par passage à la limite ($N\to+\infty$), on obtient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{n}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sim\frac{1}{n}.}$$

B.2.(b)iii. Appliquons le résultat de la question A.1.(b)

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2n^2} > 0$, $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{2n^2}$ converge.

On en déduit que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}.$$

Par la question précédente, on en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \sim \frac{1}{2n}.}$$

B.2.(c) On a vu en B.2.(a) que $\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_n$ d'où :

$$u_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En reprenant la définition de u_n, on obtient :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = H_n - \ln n - \gamma - \dfrac{1}{2n}$.

Comme $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série télescopique $\sum_{k \geqslant n} (v_k - v_{k+1})$ converge et on a $\sum_{k=n}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) = v_n - \lim\limits_{k \to +\infty} v_k = v_n$.

Déterminons un équivalent de $v_n - v_{n+1}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
v_n - v_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2n} \\
&= -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

On a donc $v_n - v_{n+1} \sim -\dfrac{1}{6n^3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{6n^3} > 0$ et la série $\sum \frac{1}{6n^3}$ converge donc d'après la question A.1.(b), on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}.$$

On en déduit $v_n \sim -\dfrac{1}{6} \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$.

Déterminons un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$.

On pourrait l'obtenir par comparaison série/intégrale mais on constate que :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sim \frac{2n}{n^4} = \frac{2}{n^3}.$$

On a donc $\dfrac{1}{n^3} \sim \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^3} > 0$ et la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge donc d'après la question A.1.(b), on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

par télescopage. On en déduit :

$$v_n \sim -\frac{1}{12n^2} \text{ d'où } v_n = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En reprenant la définition de v_n, on obtient :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$