Corrigé du devoir à la maison n ° 2

Mines Ponts 2023 MP

I La fonction W de Lambert

I.A Tir d'un projectile sans frottement

1) Un référentiel est galiléen si le principe d'inertie s'y applique. Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour des expériences dont la durée est faible devant un jour (et dont l'étendue spatiale n'est pas trop grande).
2) Le point matériel n'est soumis qu'à son poids, d'où l'équation du mouvement $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$.
Le mouvement est initié dans un plan vertical (O, y, z) et aucune force n'agissant sur le point matériel n'a de composante selon Ox Le mouvement reste donc dans ce plan vertical initial. Cela se montre aussi par projection du principe fondamental de la dynamique selon Ox qui donne $m\ddot{x} = 0$, puis par deux intégrations successives $x = 0$.
3) Sur Oy la projection donne $m\ddot{y} = 0$, d'où par intégration $y(t) = v_0 \cos(\theta_0)\, t$.
De même selon Oz, il vient $\ddot{z} = -g$, soit après intégration $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta_0)\, t$.
Ceci forme déja une équation de la trajectoire. Je ne sais pas si l'énoncé voulait une équation **cartésienne**. Il suffit pour cela d'éliminer le temps entre les expressions de $y(t)$ et $z(t)$. On arrive classiquement à la parabole habituelle $z(y) = -\frac{g}{2gv_0^2\cos^2(\theta_0)}y^2 + \tan(\theta_0)\, y$.
La trajectoire présente effectivement une symétrie (un axe de symétrie plus exactement).
4) Le sommet de la trajectoire est atteint lorsque la vitesse verticale (selon z) s'annule, soit à $t_S = \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}$. On a alors $y_S = y(t_S) = \frac{v_0^2}{g}\sin(\theta_0)\cos(\theta_0)$ et $z_S = z(t_S) = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\theta_0)$.
La portée ℓ est la distance horizontale parcourue au moment où le projectile retombe sur le sol. Par symétrie elle vaut $\ell = 2s_X = \frac{2v_0^2}{g}\sin(\theta_0)\cos(\theta_0) = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0)$.
La portée est alors clairement maximale pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

I.B Tir d'un projectile avec frottement

5) Il vient facilement $\dim(\alpha) = M.T^{-1}$.
L'analyse dimensionnelle précédente suggère de prendre $\tau = \frac{m}{\alpha}$.
On peut se convaincre de la valité du raisonnement en voyant que dans l'équation du mouvement il y aura les deux termes $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\alpha\overrightarrow{v}}{m}$ qui se réécrit alors $\frac{\overrightarrow{v}}{\tau}$.
Le mouvement reste plan car le mouvement est toujours initié dans le plan Oyz et la force supplémentaire est également dans ce plan.
6) Sur Oy la projection du principe fondamental de la dynamique donne $m\ddot{y} = -\alpha\dot{y}$, ou encore $m\dot{v_y} = -\alpha v_y$ en notant $v_y = \dot{y}$. Par intégration $v_y(t) = v_0 \cos(\theta_0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Une deuxième intégration donne $y(t) = \tau v_0 \cos(\theta_0)\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$.

De même selon Oz, il vient $\ddot{z} = \dot{v_z} = -g - \frac{v_z}{\tau}$, soit après intégration $v_z(t) = -g\tau + (v_0 \sin(\theta_0) + g\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

Une intégration supplémentaire donne $z(t) = -gt\tau + \tau\left(v_0 \sin(\theta_0) + g\tau\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$.

7) En effectuant un développement limité en t/τ, il vient $1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \simeq \frac{t}{\tau}$. En reportant dans les expressions de y et z, il vient $y(t) = v_0 \cos(\theta_0)$, et $z(t) = v_0 \sin(\theta_0)$. La trajectoire est alors rectiligne uniforme de vitesse v_0, selon la direction initiale du vecteur vitesse.

8) Si $t \gg \tau$, alors les termes en exponentielle peuvent être considérés comme nuls. Il vient donc $y(t) = \tau v_0 \cos(\theta_0)$ et $z(t) = -gt\tau + \tau\left(v_0 \sin(\theta_0) + g\tau\right)$. Ceci montre que la trajectoire est rectiligne verticale, avec une vitesse limite $\overrightarrow{v}_\infty = -g\tau\overrightarrow{u}_z$, soit $v_\infty = g\tau$.

9) La trajectoire est composée d'abord d'une partie rectiligne, puis une partie courbe, et se termine par une trajectoire rectiligne verticale descendante.

10)

I.C Portée maximale d'un tir avec frottement

11) La fonction T est définie, de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$. Elle admet une limite nulle en $-\infty$. Elle diverge en tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.

Son tableau de variation montre qu'elle est décroissante sur $]-\infty, -1]$, qu'elle passe par un minimum en $\chi = -1$, puis qu'elle est croissante.

La valeur du minimum est $\beta = -\frac{1}{e}$.

Pour obtenir la réciproque, on trace la courbe symétrique par rapport à la première bissectrice du bout de graphe correspondant à $\chi \geqslant -1$.

Remarque personnelle : que vient faire ce genre de question dans un problème de physique...

12) Comme $T(0) = 0$, il est évident que $W(0) = 0$.

On peut proposer le code suivant :

```
from math import exp

import matplotlib.pyplot as plt

h = 0.0001
x0 = 0
w0 = 0
xmax = 2.5

x = []
w = []

x_c = x0
w_c = w0
while (x_c <= xmax):
    x.append(x_c)
    w.append(w_c)
    w_c = w_c + h / (x_c + exp(w_c))
    x_c = x_c + h

plt.figure()
```

```
plt.plot(x, w)
plt.grid()
plt.show()
```

13) On cherche à résoudre $z(t) = 0$, soit $-gt\tau + \tau\left(v_0 \sin(\theta_0) + g\tau\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) = 0$, ce qui est de la forme $at + b + c\exp(dt)$ en posant $a = -g\tau$, $b = -g\tau^2 u$, $c = g\tau^2 u$ et $d = -1/\tau$. En utilisant la relation de l'énoncé il vient donc $t^* = \tau\left(-u + W\left(u\exp(u)\right)\right)$!

14) La portée est donnée par $\ell = y(t^*) = \tau v_0 \cos(\theta_0)\left(1 - \exp(-t^*/\tau)\right)$.
Or $\exp(-t^*/\tau) = \exp\left(u - W(ue^u)\right) = \dfrac{e^u}{\exp\left(W(ue^u)\right)}$. Mais d'après la remarque de l'énoncé $\exp\left(W(ue^u)\right) = \dfrac{ue^u}{W(ue^u)}$, dès lors $\exp(-t^*/\tau) = e^u \dfrac{W(ue^u)}{ue^u} = \dfrac{W(ue^u)}{u}$, ce qui permet d'obtenir le résultat attendu.

15) Numériquement $v_\infty = g\tau = 3.924\,\mathrm{m/s}$. On a donc $\gamma = \dfrac{v_0}{v_\infty} = \dfrac{10}{3,924} = 2,548 \neq 1$.
On a alors $\dfrac{\gamma^2 - 1}{e} = 2,02$. On lit $W(\dfrac{\gamma^2 - 1}{e}) = 0.857$.
Enfin $\dfrac{\gamma W\left(\frac{\gamma^2-1}{e}\right)}{\gamma^2 - 1 - W\left(\frac{\gamma^2-1}{e}\right)} = 0,471$, d'où enfin $\theta_{\max} = 28.8$ degré (j'ai fait les calculs à l'aide de python).
Si on travaille graphiquement on trouve quelque chose proche de 30 degrés.

II L'intégrale elliptique de première espèce

16) Question classique ; Par application du théorème du moment cinétique scalaire en projection sur Oz il vient classiquement $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$, soit $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta = 0$.

17) Dans cette approximation l'équation différentielle précédente devient $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\theta = 0$, ce qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$, d'où une période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$.
Cette période ne dépend pas de l'amplitude du mouvement, ce qui est assez surprenant...
On parle d'isoschronisme des oscillations.

18) Le système est conservatif. Ici cela se traduit par $\dfrac{1}{2}m\ell^2\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_0$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\dfrac{2g(\cos\theta - \cos\theta)}{\ell}}$.
On en déduit $\mathrm{d}t = \pm\sqrt{\dfrac{\ell}{2g(\cos\theta - \cos\theta)}}\mathrm{d}\theta = \pm\dfrac{T_0}{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta)}}$.
On obtient alors la période en multipliant par 4 la durée mise pour le pendule pour passer de 0 à θ_0 (pendant ce mouvement $\mathrm{d}\theta > 0$), soit $T = 4 \times \displaystyle\int_0^{\theta_0} \dfrac{T_0}{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta)}}$, ce qui après réécriture est bien l'expression attendue.
La propriété précédente n'est alors plus vérifiée.

19) Le tracé demandé est donné sur la figure suivante.
Pour le principe de la méthode du calcul d'intégrale par la méthode des rectangles médians, l'idée est, après avoir choisi une largeur h de la base des rectangles d'approcher

$\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x$ par $h * f(x_0 + h/2)$. Ensuite on fait la somme de l'aire de tous les rectangles qui s'étendent de a à b, les bornes de l'intégrale. En notant $N = \dfrac{b-a}{h}$ le nombre de rectangles (et pas simplement 9 rectangles...), on va donc calculer

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=0}^{N-1} h \times f\left(a + ih + h/2\right)$$

Si on double le nombre de rectangles le majorant de l'erreur est divisé par 4.

20) On peut proposer le code suivante :

```
import math as m
def f(x, phi):
    return 1 / m.sqrt(1 - x * m.sin(phi) ** 2)

S = 0.
N = 100
a = 0.
b = m.pi / 2.
pas = (b - a) / N
theta_0 = m.pi / 3
x = m.sin(theta_0 / 2) ** 2 # Faute d'énoncé...
for i in range(N):
    phi = a + i * pas
    S = S + f(x, phi + pas / 2)

print(pas * S)
```

21) On lit sur le graphique $T/T_0 = 1,05$ pour $\theta_0 = 50$ degrés (l'utilisation du programme précédent donne en fait $1.049\,78$).

En une heure on va donc mesurer $3600/1,05 = 3428$ tics d'horloges, que l'on interprétera de manière erronée comme 3428 secondes. On va donc avoir un décalage de 172 secondes sur une heure, soit près de trois minutes ! Autrement dit si un phénomène dure 1H on le mesurera à seulement 57 minutes.

Inversement si on attend 3600 clics d'horloges il se sera écoulé $3600 \times 1,05 = 3780$ secondes. Il se sera en fait écoulé 1H et 3 minutes.

22) On rencontre la cycloïde dans le mouvement d'une valve d'une roue de vélo, pour un observateur lié au sol.