DEVOIR MAISON 3 - Compléments d'algèbre linéaire

À rendre le jeudi 19 octobre

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, on utilise les notations suivantes :

$$u^0 = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*,\ u^k = u \circ u^{k-1}.$$

Un endomorphisme u est dit *de carré nul* lorsque u^2 est l'endomorphisme nul.
Un endomorphisme u est dit *nilpotent* lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que u^k est l'endomorphisme nul.

À part la dernière question, les différentes parties de ce problème sont indépendantes.

I. Cœur et nilespace d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E.

1. Montrer que la suite $\big(\mathrm{Ker}(u^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-espaces vectoriels de E croissante pour l'inclusion.

2. Montrer que la suite $\big(\mathrm{Im}(u^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-espaces vectoriels de E décroissante pour l'inclusion.

3. Que peut-on dire de la suite d'entiers $\Big(\dim\big(\mathrm{Ker}(u^k)\big)\Big)_{k\in\mathbb{N}}$?
   Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $k \geqslant r$, $\dim\big(\mathrm{Ker}(u^k)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(u^r)\big)$.

4. En déduire que pour tout entier $k \geqslant r$, $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^r)$ et $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^r)$.

   Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u^r)$ et $\mathrm{Im}(u^r)$ sont appelés *nilespace* et *cœur* de l'endomorphisme u.

5. (a) Établir que $E = \mathrm{Ker}(u^r) \bigoplus \mathrm{Im}(u^r)$.

   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^r)$ et $\mathrm{Im}(u^r)$ sont stables par u.

   (c) On note u_1 l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}(u^r)$.
   Montrer que u_1 est un endomorphisme nilpotent de $\mathrm{Ker}(u^r)$.

   (d) On note u_2 l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u^r)$.
   Montrer que u_2 est un automorphisme de $\mathrm{Im}(u^r)$.

II. Endomorphismes échangeurs

Un endomorphisme u de E est dit *échangeur* lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G,\ u(F) \subset G \ \text{ et } \ u(G) \subset F.$$

A. Cas de la dimension 2

Dans cette partie A. uniquement, on suppose que E est de dimension 2.
Soit u un endomorphisme non nul de E.

1. On suppose dans cette question 1. uniquement que u est échangeur.
   Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

   (a) Montrer que $\dim(F) = \dim(G) = 1$.

   (b) En déduire, en utilisant la matrice de u dans une base bien choisie, la valeur de la trace de u notée $\operatorname{Tr}(u)$.

2. On suppose dans cette question 2. uniquement que $\operatorname{Tr}(u) = 0$.

   (a) On fait l'hypothèse dans cette question 2.(a) uniquement que (e_1, e_2) une base de E telle que les familles $(e_1, u(e_1))$ et $(e_2, u(e_2))$ sont toutes deux liées.

      i. Montrer que la matrice de u dans la base (e_1, e_2) est de la forme :

      $$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

      ii. On pose $e_3 = e_1 + e_2$. En déduire que la famille $(e_3, u(e_3))$ est libre.

   (b) Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0))$ soit une base de E.

   (c) En utilisant la matrice de u dans la base $(x_0, u(x_0))$, établir que u est échangeur.

3. Quelle équivalence a-t-on démontrée dans cette partie ?

On revient au cas général, E est désormais de dimension finie non nulle quelconque.

L'objectif de la fin du problème est d'établir pour $u \in \mathscr{L}(E)$, l'équivalence entre les deux conditions suivantes :

(C1) L'endomorphisme u est échangeur.
(C2) Il existe deux endomorphismes a et b de E, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$.

B. La condition (C1) implique la condition (C2)

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.
On considère dans $\mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{C})$.
   Montrer alors que M est la somme de deux matrices de carré nul.

Jusqu'à la fin de cette partie B., u désigne un endomorphisme échangeur de E et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

2. On suppose dans cette question F et G tous deux non nuls.
Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice u dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

3. En déduire que u vérifie **(C2)**.
On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces F ou G est nul.

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie C., u désigne un automorphisme de E et on suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

1. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Comparer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant \frac{1}{2}\dim(E).$$

2. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)$, $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(b)$.

3. En déduire que u est échangeur.

D. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

On admet la validité de l'énoncé suivant.

Théorème : Tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

Dans cette partie D., u désigne un endomorphisme non bijectif de E et on suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

1. Montrer que a et b commutent avec u^2.

2. Soit p un entier pair.
Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Im}(u^p)$ est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_G et b_G sont de carré nul.

3. En déduire que u est échangeur.
On pourra utiliser, entre autres, les résultats établis dans les parties I. et II.C.