Corrigé du DM 3

Exercice 64

1. Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (*)
Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.

Soit $y \in \mathrm{Im} f$.
Alors, $\exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, donc $\exists\,(a,b) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$.
Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ (**)
D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

2. a) On a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.
On en déduit que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f \iff \mathrm{rg} f^2 = \mathrm{rg} f$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \iff \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2$.
Alors, en utilisant le théorème du rang, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.

b) Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$.

$\exists\, a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker} f^2$.
Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$ donc $a \in \mathrm{Ker} f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
C'est-à-dire $x = 0$.
Ainsi $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. (***)
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim E$. (****)

Donc, d'après (***) et (****), $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice 1 (CCINP 87).

Exercice 87

1. L'application $u : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)) \end{array}$ est linéaire.
Montrons que $\mathrm{Ker} u = \{0\}$.

Si $P \in \mathrm{Ker} u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, admet $n+1$ racines distinctes.
Donc $P = 0$.
Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \ldots, b_n)$.

La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \ldots, b_n))$.

2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \cdots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :

$$\deg L_k \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

Comme $a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leqslant n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$$

La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}$ et finalement :

$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit $p \in [\![0,n]\!]$.
Les polynômes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

$$\deg P \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$

Par l'unicité vue en première question, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.