Corrigé du DS 2

Exercice 1 :

1. La suite $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$ telle que les sous-suites $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(-n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de $\mathcal{C}$

2. • $\mathcal{C}$ est une partie non vide de E (contient la suite précédente).

- Soit $(x,x')\in\mathcal{C}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On pose $y=\alpha x+\beta x'$ et on note x_n,x'_n,y_n les termes généraux des suites x,x',y'.
  On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, y_n=\alpha x_n+\beta x'_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, y_n=\alpha x_n+\beta x'_n$ et $\forall n\in\mathbb{N}, y_{-n}=\alpha x_{-n}+\beta x'_{-n}$.
  Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Comme les suites $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(x'_{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$.
  Ainsi $y\in\mathcal{C}$. Et donc $\mathcal{C}$ est stable par combinaison linéaire.
  Donc par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace de } E}$

3. Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{C}$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $A>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |x_n|\leqslant A$.
De même, la suite $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $B>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |x_{-n}|\leqslant B$.
On pose alors $C=\max(A,B)$, et on a : $\forall n\in\mathbb{Z}, |x_n|\leqslant C$: la suite x est bornée.
Ainsi $\boxed{\text{toute suite dans } \mathcal{C} \text{ est bornée}}$

4. Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{C}$. Soit $y=T(x)=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, y_n=x_{n-1}+x_{n+1}$.
Ainsi :

- $\forall n\in\mathbb{N}^*, y_n=x_{n-1}+x_{n+1}$ donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui sont extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc qui convergent. Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donc, comme la convergence d'une suite ne dépend pas des premiers termes, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- De même $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Ainsi $y\in\mathcal{C}$.
On en déduit que T est une application de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$.
Montrons la linéarité. Soit $(x,x')\in\mathcal{C}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On pose $y=T(x)$, $y'=T(x')$, $z=\alpha x+\beta x'$, et $w=T(z)$ et $v=\alpha y+\beta y'$. On doit établir : $T(\alpha x+\beta x')=\alpha T(x)+\beta T(x')$ i.e. $v=w$. On note $x_n,x'_n,y_n,y'_n,z_n,w_n,v_n$ les termes généraux des suites x,x',y,y',z,w,v. On a, pour tout $n\in\mathbb{Z}$:
$v_n=\alpha y_n+\beta y'_n=\alpha\left(x_{n-1}+x_{n+1}\right)+\beta\left(x'_{n-1}+x'_{n+1}\right)=\left(\alpha x_{n-1}+\beta x'_{n-1}\right)+\left(\alpha x_{n+1}+\beta x'_{n+1}\right)$. Or dans ces derniers termes on reconnaît $z_{n-1}+z_{n+1}=w_n$.
Donc $v=w$.
Ainsi T est bien une application linéaire de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ i.e. $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{C}}$

5. • Méthode 1. On a clairement $S\circ S=\mathrm{id}_E=\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Donc comme l'énoncé nous dit que S est un endomorphisme de $\mathcal{C}$, on en déduit que S est une symétrie de $\mathcal{C}$ et donc son axe, $\operatorname{Ker}(S-\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$, et sa direction, $\operatorname{Ker}(S+\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$, sont supplémentaires dans $\mathcal{C}$.
Or on a tout aussi clairement

$$\begin{aligned} F&=\{x\in\mathcal{C};\forall n\in\mathbb{Z}, x_n=x_{-n}\}\\ &=\{x\in\mathcal{C};S(x)=x\}=\operatorname{Ker}(S-\mathrm{id}_{\mathcal{C}})\end{aligned}$$

et $G=\operatorname{Ker}(S+\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$,
donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous-espaces supplémentaires dans } \mathcal{C}}$

- Méthode 2. On a $F=\operatorname{Ker}(S-\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ et $G=\operatorname{Ker}(S+\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ donc ce sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$, propres pour l'endomorphisme S, associés à des valeurs propres différentes : 1 et -1. Donc F et G sont en somme directe i.e. $F+G=F\oplus G$.
  De plus, si $x\in\mathcal{C}$, $x'=\frac{1}{2}(x+S(x))$ et $x''=\frac{1}{2}(x-S(x))$, on montre aisément $x=x'+x''$, $x'\in F$ et $x''\in G$, donc tout élément de S s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc comme ce sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{C}=F+G$.
  Ainsi par caractérisation des sous-espaces supplémentaires,
  $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{C}}$

6. En reprenant ce qui a été fait dans la méthode 1 dans la question précédente, on a :
$\boxed{S \text{ symétrie d'axe } F \text{ et de direction } G}$

7. .

a) Si $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$. Soit $x\in\operatorname{Ker}(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, x_{n-1}+x_{n+1}=\lambda x_n$.
En particulier :
$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+2}-\lambda x_{n+1}+x_n=0$ et, en posant $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n\in\mathbb{N}, x'_{n+2}-\lambda x'_{n+1}+x'_n=0$. On considère donc l'équation caractéristique $\mathcal{C}$ de ces suites récurrentes linéaires doubles : $X^2-\lambda X+1=0$ dont le discriminant est $\Delta=\lambda^2-4$ donc est non nul car λ est différent de 2 et de -2

- Si $\Delta>0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont réelles, distinctes et de produit 1. Donc l'une d'entre elles est de module strictement supérieur à 1 et l'autre est son inverse. On note r la racine de module strictement supérieur à 1.
  D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles, On a l'existence de 4 réels A,B,C,D tels que : $\forall n\in\mathbb{N}, x_n=Ar^n+\frac{B}{r^n}$ et $x'_n=Cr^n+\frac{D}{r^n}$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc $A=0=C$. De plus $x_0=x'_0$ donc $B=D$. Enfin $x'_1+x_1=\lambda x_0$ donc $(\lambda-2r)B=0$. Or les racines de $\mathcal{C}$ sont $\frac{\lambda\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

donc $|\lambda - 2r| = \sqrt{\Delta} \neq 0$. Ainsi $B = D = 0$ et donc x est la suite nulle. Donc $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \subset \{0_{\mathcal{C}}\}$
S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$

- Si $\Delta < 0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont complexes non réelles et conjugués distinctes et de produit 1. Donc elles sont de module 1 et on peut les écrire sous la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.
D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles réelles, On a l'existence de 4 réels A, B, α, β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A\,(\cos(n\theta + \alpha))$ et $x'_n = B\,(\cos(n\theta + \beta))$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors que les suites $(\cos(n\theta + \alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta + \beta))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent car θ n'est pas un multiple de 2π donc $A = 0 = B$. Donc x est la suite nulle. Donc $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \subset \{0_{\mathcal{C}}\}$
S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$

Ainsi si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}}$

b) On applique le résultat précédent avec $\lambda = 0$. On a $\mathrm{Ker}(T) = \{0_{\mathcal{C}}\}$, donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, $\boxed{T \text{ est injectif}}$

c)
- Si $\lambda = 2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(T - 2\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : 1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = A + Bn$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $B = 0$ et donc x est une suite constante.
Réciproquement, les suites constantes sont clairement dans $\mathrm{Ker}\,(T - 2\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}\,(T - 2\mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$
- Si $\lambda = -2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(T + 2\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : -1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = (A + Bn)(-1)^n$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $B = 0$ et, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $A = 0$ donc x est la suite nulle.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}\,(T + 2\mathrm{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}}$

d) Avec les 3 questions précédentes, on a établi que
$\boxed{T \text{ ne possède qu'une valeur propre : } 2}$

Exercice 2 :

1. $f \in \mathcal{E}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, f est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par la relation de Chasles, nous avons d'abord :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ensuite, le changement affine de variable : $u = t - T$ dans la dernière intégrale donne grâce à la T-périodicité de f :

$$\int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)_d dt}$$

2. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$, puis en dérivant cette égalité par rapport à x, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+T) = f'(x)$ donc si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, alors f' est T-périodique.

Par contre, si on considère la fonction identique $x \mapsto x$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, n'est pas périodique mais sa dérivée est constante sur $\mathbb{R}$ donc périodique (pour n'importe quelle période). Par conséquent, la réciproque étudiée est effectivement fausse : si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée est T-périodique, alors f n'est pas nécessairement périodique.

3. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet au moins une primitive F sur $\mathbb{R}$, qui est par définition de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Nous avons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(f)(x) = F(x) - F(x-1)$, donc par différence de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \big(U(f)\big)'(x) = f(x) - f(x-1)}$.

4. Comme une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la question précédente prouve que U est une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

De plus, la linéarité de l'intégration des fonctions continues sur un segment justifie que U est linéaire :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{E}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$U(\lambda.f + g)(x) = \int_{x-1}^x (\lambda.f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t$$

$$= \lambda \int_{x-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x-1}^x g(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \lambda.U(f)(x) + U(g)(x)$$

Par conséquent, U est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. a) Les fonctions polynomiales étant continues sur $\mathbb{R}$, nous pouvons considérer la restriction de U à E_n. Pour justifier que U définit un endomorphisme sur E_n, il suffit de montrer que E_n est stable par U. Pour cela, comme $\mathcal{B}_n$ est une famille génératrice de E_n, il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $U(X^k) \in E_n$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(X^k)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^x t^k\,\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{(x-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j}\frac{(-1)^{k-j}}{k+1}x^j$,

autrement dit $U(X^k) = \displaystyle\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j}\frac{(-1)^{k-j}}{k+1}X^j \in E_n$.

Par conséquent, E_n est stable par U et U induit un endomorphisme U_n sur E_n.

b) Les calculs effectués dans la question précédente nous permettent d'écrire la matrice A_n de U_n dans la base $\mathcal{B}_n$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \dfrac{(-1)^n}{n+1} \\ 0 & 1 & -1 & & (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & & (-1)^n\dfrac{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

plus précisément, les coefficients de A_n sont

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j < i \leqslant n+1 \\ \binom{j}{i-1}\dfrac{(-1)^{j-i}}{j} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1 \end{cases}$$

c) La matrice A_n est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc A_n est inversible et par conséquent,
U_n est bijectif.

La matrice A_n étant triangulaire, les valeurs propres de U_n sont les coefficients diagonaux de A_n, donc U_n possède une seule valeur propre : 1, de multiplicité $n+1$. Si U_n était diagonalisable, alors A_n serait semblable à I_{n+1} donc égale à I_{n+1}, ce qui n'est pas le cas, donc U_n n'est pas diagonalisable.

(*Autre argument : on pouvait aussi calculer* $\dim \mathrm{Ker}(A_n - I_{n+1}) = n+1-\mathrm{rg}(A_n - I_{n+1}) = 1 \neq n+1$.)

6. Si $f \in \mathrm{Ker}(U)$, alors $U(f)$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, d'où :

(i) d'une part, $U(f)(1) = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$,

(ii) et d'autre part, sa dérivée, $U(f)'$, est aussi la fonction nulle, ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(x-1) = 0$, ce qui prouve que f est périodique de période 1.

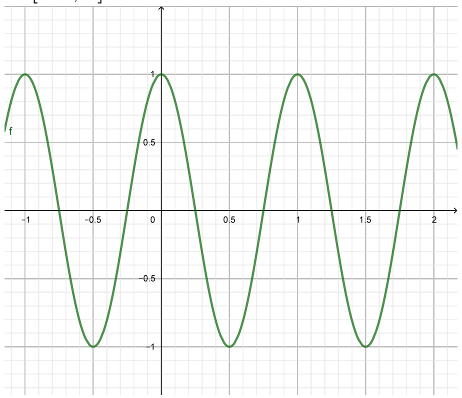
7. Réciproquement, si $f \in \mathcal{E}$, périodique de période 1 et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $U(f)'$ est la fonction nulle, d'où $U(f)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ telle que $U(f)(1) = 0$ donc $U(f)$ est la fonction nulle, par conséquent, $\boxed{\mathrm{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathcal{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}}$.

8. La fonction $\boxed{f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } t \mapsto \cos(2\pi t)}$ est continue, 1-périodique et vérifie

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 = 0,$$

donc f est bien une fonction non nulle, élément de $\mathrm{Ker}(U)$.

Sa représentation sur $[-1, 2]$ est :



9. La fonction valeur absolue est élément de $\mathcal{E}$ mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc elle n'admet pas d'antécédent par U (d'après **3.**), d'où U n'est pas surjectif.

10. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $f_a : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = U(f_a)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}\mathrm{e}^{ax}$, donc $\boxed{F_a = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a} f_a}$.

b) La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, g est prolongeable par continuité en 0 par $g(0) = 1$, car il est connu que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + 1$.

h est alors définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $h'(x) = x\mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $h'(x)$ est du signe de x, d'où h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que h est positive sur $\mathbb{R}$, et même strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.

Par conséquent, g' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et par continuité de g sur $\mathbb{R}$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ensuite, il est immédiat que $\lim\limits_{-\infty} g = 0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$. On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	$\Vert$	$+$	$+$
g	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) D'après les résultats obtenus dans la question précédente, g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi, pour tout réel $\lambda > 0$, il existe un réel b tel que $\lambda = g(b)$.

De plus, nous avons vu que si $a \neq 0$, alors $U(f_a) = g(-a)f_a$ donc si $b \neq 0$, $U(f_{-b}) = \lambda . f_{-b}$ où f_{-b} n'est pas la fonction nulle, donc tout réel λ strictement positif et différent de 1 est valeur propre de U. De plus, nous avons vu que $U(1) = 1$ (question **5.**) d'où 1 est valeur propre de U.

En conclusion,
tout réel λ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme U.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_n$.

1. Soit Φ l'application qui à tout élément u de $\mathcal{E}$ associe le triplet (u_0, u_1, u_2) de $\mathbb{R}^3$.

a) • Pour tout $(u,v) \in \mathcal{E}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda u + v) &= \Phi((\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2)\\ &= \lambda(u_0, u_1, u_2) + (v_0, v_1, v_2) = \lambda\Phi(u) + \Phi(v),\end{aligned}$$

donc Φ est linéaire.
• Il est clair que $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^3$.

• Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la suite u définie par $u_n = \begin{cases} x & \text{si } n = 3k \\ y & \text{si } n = 3k+1 \\ z & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$ vérifie $u \in \mathcal{E}$ et $\Phi(u) = (x,y,z)$, donc Φ est surjective.
• Enfin, si $\Phi(u) = 0$, alors $u_0 = u_1 = u_2 = 0$, et on peut alors démontrer par récurrence immédiate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{3n} = u_{3n+1} = u_{3n+2} = 0,$$

donc la suite u est nulle.
Par suite, $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$, donc Φ est injective.
• Φ est une application linéaire bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.

b) Comme Φ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$, où $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, on a $\mathcal{E}$ de dimension finie et $\dim \mathcal{E} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

2. a) Φ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, Φ^{-1} est aussi un isomorphisme. Par suite, l'image de toute base de $\mathbb{R}^3$ par Φ^{-1} est une base de $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\Phi^{-1}(e_1), \Phi^{-1}(e_2), \Phi^{-1}(e_3))$ est une base de $\mathcal{E}$.

b) D'après la construction d'un antécédent (et donc de l'antécédent car Φ est bijective) faite en question 1.a on a :

$$\varepsilon_{1n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3k \\ 0 & \text{si } n = 3k+1 \\ 0 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}, \quad \varepsilon_{2n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3k \\ 1 & \text{si } n = 3k+1 \\ 0 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{3n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3k \\ 0 & \text{si } n = 3k+1 \\ 1 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}.$$

3. a) Pour tout $u \in \mathcal{E}$, $v = d(u)$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = u_{n+1+3} = u_{n+1} = v_n,$$

donc $v \in \mathcal{E}$. On a donc $d : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.
• Pour tout $(u,v) \in \mathcal{E}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(\lambda u + v) &= d((\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \lambda(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lambda d(u) + d(v),\end{aligned}$$

donc d est une application linéaire.
• d est donc bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

b) On a de façon évidente $d(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$ et $d(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$.
Posons $v = d(\varepsilon_1)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \varepsilon_{1n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n+1 = 3k \\ 0 & \text{si } n+1 = 3k+1 \\ 0 & \text{si } n+1 = 3k+2 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3k'+2 \\ 0 & \text{si } n = 3k \\ 0 & \text{si } n = 3k+1 \end{cases},$$

donc $d(\varepsilon_1) = \varepsilon_3$.
On peut aussi ditre que $\Phi(d(\varepsilon_1)) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}) = (0,0,1) = \Phi(\varepsilon_3)$, donc, comme Φ est injective, $d(\varepsilon_3) = \varepsilon_1$.

Par suite, $M = Mat_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Soit $u \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} u \text{ est invariant par } d &\Leftrightarrow d(u) = u \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \\ &\Leftrightarrow u \text{ est constante}\end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{D}$ est l'ensemble des suites constantes.

Exercice 4 :

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$, par hypothèse : $f(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_i)$ et $e_i \neq 0$, donc il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
De même $f(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i) \in \operatorname{Vect}(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda e_i$.

Or par linéarité de f, $f(\sum_{i=1}^{n} e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda e_i,$$

or $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, donc : $\forall i \in [\![1\,;n]\!], \lambda_i = \lambda$.

Donc : $\forall i \in [\![1\,;n]\!], f(e_i) = \lambda e_i = \lambda \mathrm{id}(e_i)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, donc :

$$\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } f = \lambda \mathrm{id}_E.}$$

2. a) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{id}$, donc $\mathrm{tr}(f) = n\lambda$ or $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M) = 0$, donc $\lambda = 0$ et $M = 0$, d'où la contradiction. Donc il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{id}$.

Or dans la question 1, on a montré que pour $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\forall x \in E, \mathrm{Vect}\, x \text{ est stable par f } \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f = \lambda \mathrm{id}.$$

Donc par contraposée, il existe $x \in E$ tel que $\mathrm{Vect}\, x$ n'est pas stable par f, donc $f(x) \notin \mathrm{Vect}(x)$; on fixe x_1 un tel x, il ne peut pas être nul ($f(0) = 0 \in \mathrm{Vect}(0)$) ; donc : $(x_1, f(x_1))$ est libre.

Donc :

$$\boxed{\text{il existe } x_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } (x_1, Mx_1) \text{ est libre.}}$$

b) La famille (x_1, Mx_1) construite ci-dessus est libre, donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe $x_3, \dots, x_n$ tels que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (avec $x_2 = Mx_1$).

Avec f l'endomorphisme canoniquement associé à M, on a $f(x_1) = x_2$, donc les coordonnées de $f(x_1)$ dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ sont : $(0, 1, 0, \dots, 0)$.

Donc, d'après les formules de changement de bases, avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1, \dots, e_n)$, $P^{-1}MP$ est la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ dont la première colonne est : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\boxed{M \text{ est semblable à une matrice dont la première colonne est : } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

3. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété H_n : « Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. »

Initialisation : H_1 est clairement vraie puisqu'une matrice 1×1 de trace nulle est nulle.

Hérédité : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n est vraie et $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle.

Si $M = 0$, M est semblable à elle-même dont les coefficients diagonaux sont nuls.

Si $M \neq 0$ il existe $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right)$$

avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'après la deuxième question.

On remarque que $\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{tr}(M) = 0$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que tous les coefficients diagonaux de $Q^{-1}NQ$ sont nuls.

Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. R est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

Par ailleurs,

$$(PR)^{-1}M(PR) = R^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right) R = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & Q^{-1}NQ \end{array}\right).$$

Ainsi, $(PR)^{-1}M(PR)$ est une matrice semblable à M dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. La propriété est donc démontrée par récurrence.

$$\boxed{\text{Montrer que toute matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ de trace nulle est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls.}}$$