Fonctions usuelles

I Famille exponentielle

1) Logarithme népérien

a) Construction et premières propriétés

Définition :

On appelle **logarithme népérien**, notée ln, l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout x réel strictement positif, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

Remarques :

- On admet pour le moment l'existence et l'unicité de cette fonction : on montrera que cela provient de la continuité de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+$
- On verra dans le chapitre intégration que l'on peut écrire :

$$\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Cette fonction possède les propriétés remarquables ci dessous, à connaître impérativement !

Theorème 1 :

Soit a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

- $\ln(ab) =$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) =$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) =$
- $\ln(a^n) =$

▷ *Preuve* :

◁

? Le saviez-vous ? **JOHN NAPIER**

John Napier, francisé en "Jean Neper", nait en 1550 en Ecosse. Issus d'une famille noble, il a la possibilité d'étudier dans les plus prestigieuses université de son époque et voyage dans toute l'Europe pour perfectionner son savoir.

On lui prête de nombreux talents : mathématicien, ingénieur (il va inventer des "machines secrètes" dans le but de défendre l'Ecosse contre une invasion espagnole), theologien.... et même sorcier !

Ses plus célèbres inventions sont les "batons de Neper" qui remplacent efficacement l'abaque dans le calcul, et bien sûr le logarithme (contraction de *logos aritmeticos* : relation entre les nombres). Il également précurseur dans l'utilisation des nombres binaires pour faciliter le calcul, préfigurant ce qui est naturellement utilisé aujourd'hui dans les ordinateurs....

b) Etude de $\ln$

Propriété 1 :

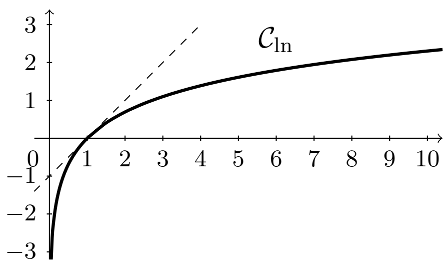
- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

▷ *Preuve* :

◁

Corolaire 1 :

La fonction ln est une bijection de sur



A noter enfin cette propriété très pratique, liée à la concavité de ln :

Propriété 2 :
$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$

▷ *Preuve* :

◁

c) Logarithme dans une autre base

Définition :
Soit $b > 0$. On appelle logarithme en base b et on note $\log_b$ la fonction

$$\log_b : \begin{array}{rl} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)} \end{array}$$

Propriété 3 :
Les résultats obtenu dans la propriété 1 pour ln sont encore valables avec $\log_b$.

▷ *Preuve* : Par exemple $\log_b(xy) =$

◁

Exemples :

- si on prend $b = e$, on a $\ln(e) = 1$ (cf la construction d'exponentielle), d'où

$$\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{1} = \ln(x)$$

- En physique chimie, on utilise fréquemment le logarithme en base 10, noté simplement log au lieu de $\log_{10}$. On parle alors de **logarithme décimal**.
  On a alors $\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$. Ainsi $\log(1000) =$
- En informatique, on utilisera également $\log_2$, appelé **logarithme binaire**. Cette fois, on a $\log_2(x) = 1$ pour $x =$

2) Exponentielle

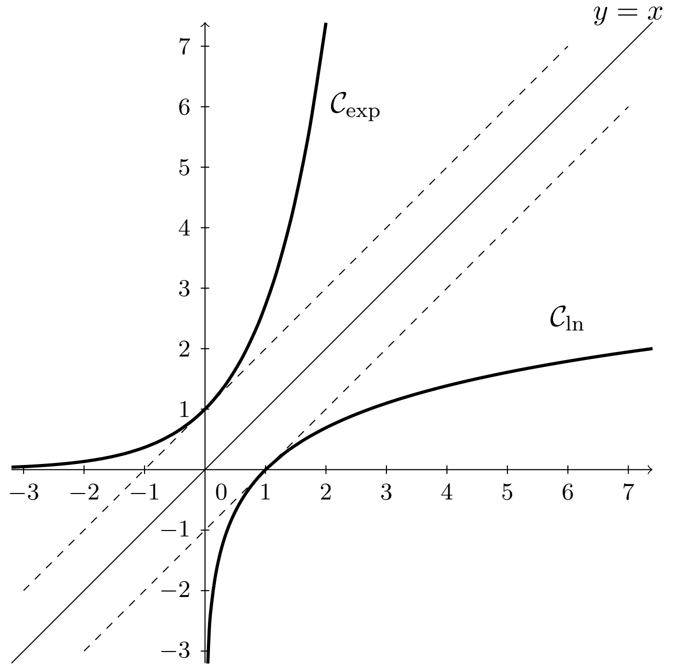
a) Construction

Définition :

On appelle fonction **exponentielle**, notée exp, la bijection réciproque de la fonction ln.
La fonction exp est une fonction strictement croissante, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}_+*$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\exp(x)$, noté également e^x, est l'unique réel dont le logarithme népérien vaut x : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

Courbe représentative :
Etant des bijections réciproques l'une de l'autre, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Par construction des bijections réciproques, on a donc :

Propriété 4 :

- Pour tout $x > 0$, on a $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout réel x, on a $\ln(e^x) = x$.

Corolaire 2 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in]0 + \infty[$, on a

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$;
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$;
- $e^a = y \Leftrightarrow a = \ln(y)$.

Remarque :
On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$ où e est appelé *nombre d'Euler* (parfois *constante de Neper*). On peut montrer que ce nombre est irrationnel (et même transcendant...) et on donne la valeur approchée $e \simeq 2{,}718$.

b) Propriétés

D'après le théorème de dérivation réciproque (voir l'exemple dans le chapitre précédent), on obtient

Proposition 1 :
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est exp.

De plus, à partir des propriétés de calculs sur le ln, on obtient directement

Propriété 5 :
Soit a, b deux réels et n un entier relatif. On a

- $e^{a+b} =$
- $e^{a-b} =$
- $e^{-a} =$
- $(e^{a})^{n} =$

▷ *Preuve* :

◁

Enfin, tout comme ln, on a une comparaison intéressante issue de la convexité :

Propriété 6 :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$e^{x} \geq 1 + x$$

▷ *Preuve* : cf TD ◁

3) Puissance réelles :

a) Racines n−ième

Considérons la fonction $x \mapsto x^n$. Celle-ci est définie sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas forcément bijective sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet :

Sur les ensembles où elle est bijective, on peut donc poser la définition suivante

Définition :

Soit $n > 0$. **Si n est pair :** Pour tout $x \geq 0$, on appelle racine n−ième de x et on on note $\sqrt[n]{x}$ l'unique réel **positif** qui, élevé la puissance n, donne x.

En particulier, pour $n = 2$, $\sqrt[2]{x}$ est noté simplement $\sqrt{x}$ et est appelé racine de x.

Si n est impair : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle racine n−ième de x et on on note $\sqrt[n]{x}$ l'unique réel (positif ou négatif) qui, élevé la puissance n, donne x.

Exemples :
$\sqrt[3]{8} =$, $\sqrt[3]{-8} =$, $\sqrt[10]{1024} =$

b) Puissances réelles :

On cherche à généraliser la notion de puissance, définie pour les entiers relatifs, aux nombres réels. Pour tout $x > 0$, on sait que $\ln(x^n) = n\ln(x)$ et donc $e^{\ln(x^n)} = e^{n\ln(x)}$.
Ainsi, $x^n = e^{n\ln(x)}$. Ceci conduit à la définition suivante :

Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ le nombre x^α par :

$$x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$$

Correspondances avec les fonctions racines n-ième :
Prenons $x > 0$ et regardons x^α avec $\alpha = \dfrac{1}{n}$.

c) Propriétés :

Propriété 7 :
On vérifie facilement les propriétés de calculs suivantes :

1. pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
2. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $(x^\alpha)^\beta =$
3. Pour tout $x > 0$ et tout réel α, $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$.

▷ *Preuve* :

◁

Propriété 8 : Dérivabilité

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall x > 0, \varphi_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

d) Etude et représentation graphique

4) Croissances comparées

Il est intéressant de comparer le comportement à l'infini de ces trois familles de fonctions, qui divergent toutes vers $+\infty$ mais de façons différentes. On dispose pour cela des résultats suivants :

Proposition 2 :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} =$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\exp(x)} =$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x} =$

▷ *Preuve* :

◁

Soit maintenant $a > 0$ et $b > 0$.
On cherche à calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^b}{x^a}$:

Corolaire 3 :

Soient a et b deux réels strictement positifs. Alors

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^a |\ln(x)^b| = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^a e^{bx} = 0$

Méthode : **UTILISER LES CROISSANCES COMPARÉES**

Les croissances comparées sont fréquemment utilisée pour lever certaines formes indéterminées impliquant des puissances, des logarithmes et des exponentielles.
Il faudra donc penser à ces formules en ayant en tête les points suivants :

- Elles ne concernent que la comparaison d'un ln avec une puissance, d'une puissance avec exp, ou d'un ln avec exp. Toute autre comparaison n'est pas une croissance comparée.

  Par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 0$ ne se justifie pas par "croissances comparées".

- Chaque fois qu'on l'utilise, on précisera bien "par croissances comparées"

- On peut bien sûr les utiliser sous leur forme inverse, toujours en disant "par croissances comparées" et sans forcément préciser que l'on est passé par l'inverse.

  Par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^{100}} = +\infty$.

II Trigonométrie réciproque

1) Arctan

a) Construction :

On considère la fonction tan. Elle n'est clairement pas strictement monotone sur son ensemble de définition, mais on peut la considérer sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ seulement.

Comme $\tan : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on a

$$\tan'(x) =$$

Ainsi, tan est strictement croissante sur l'intervalle I.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) =$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) =$

Comme tan est continue, on a donc, par

$$f(I) =$$

Le théorème de la bijection monotone garantit donc que tan est bijective de $]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$

Définition :

On appelle arctan la fonction bijection réciproque de la restriction à $]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$ de tan.
arctan est ainsi définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$, et est strictement croissante.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ donne l'unique "angle" $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = x$.

Exemple :
$\arctan(1) =$, $\arctan(0) =$, $\arctan\sqrt{3} =$

b) Propriétés et représentation graphique

Propriété 9 :
La fonction arctan est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(-x) = -\arctan(x)$$

▷ *Preuve :*

◁

Propriété 10 :

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \qquad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) =$$

▷ *Preuve :*

◁

Représentation graphique :

c) Dérivée :

On a vu dans le chapitre 2 que si une fonction f est bijective et que f est dérivable en un point x_0 avec alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ avec

$$f^{-1\prime}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Ici, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$ donc arctan est dérivable sur

Appliquons la formule :

d'où le résultat suivant :

Proposition 3 :

La fonction arctan est dérivable sur et

$$\arctan'(x) =$$

2) Arcsin

a) Construction :

b) Propriétés et représentation graphique :

c) Dérivée :

3) Arccos

a) Construction :

b) Propriétés et représentation graphique :

c) Dérivée :

4) Bilan :

On dispose maintenant de 3 "nouvelles" fonctions, à ne pas mélanger.

Nom	Bijection de	Ens. de définition	Ensemble image	Dérivée
Arctan	$\tan_{\|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$	$\mathbb{R}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$	sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
Arcsin	$\sin_{\|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$	$[-1;1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$	sur $]0;1[$: $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arccos	$\cos_{\|[0;\pi]}$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$	sur $]-1;1[$: $x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

III Cosinus et sinus hyperbolique

1) Définition

Définition :

- On appelle **cosinus hyperbolique**, notée ch, la fonction

$$\text{ch} : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

- On appelle **sinus hyperbolique**, noté sh, la fonction

$$\text{sh} : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Remarque :
Ces fonctions tirent leur nom de leur ressemblance avec les formules d'Euler, que l'on verra dans le chapitre sur les complexes :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Les propriétés sont en outre assez proches de leurs homologues trigonométriques....

Propriété 11 :

- la fonction ch est une fonction paire.
- la fonction sh est une fonction impaire.

▷ *Preuve :*

◁

Remarque :
On a vu en exemple d'analyse synthèse que toute fonction peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Si on applique cette décomposition à exp, on obtient alors que ch est la partie paire d'exponentielle, et sh la partie impaire.

Propriété 12 :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

▷ *Preuve :*

◁

2) Dérivée et variation

a) Cos hyperbolique

Propriété 13 :
La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x) =$$

▷ *Preuve* :

◁

Etudions le signe de ch' pour en déduire le tableau de variation :

b) Sinus hyperbolique

Propriété 14 :
La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}'(x) =$$

▷ *Preuve* :

◁

Etudions le signe de sh' pour en déduire le tableau de variation :

3) Représentations graphiques :