

Algèbre - Chapitre 3 : Sommes et produits

Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Ecrire les sommes ou produits suivants à l'aide du symbole \sum ou \prod :

1. $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3$.
2. $4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + \dots + 4x_n + 4x_{n+1}$.
3. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times (20)$
4. $x_0 + x_2 + x_4 + \dots + x_{2n}$.
5. $\cos(x) \cos(2x) \cos(3x) \times \dots \times \cos(nx)$
6. $x_n + x_{n+1} + \dots + x_{2n-1} + x_{2n}$.
7. $a_p^3 a_{p+1}^3 \dots a_n^3$

Exercice 2 :

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{10} k$
2. $\sum_{k=3}^7 (k-3)$
3. $\sum_{k=1}^8 (k-1)^2$
4. $\sum_{k=1}^5 1$
5. $\sum_{k=0}^5 6$
6. $\sum_{k=0}^5 (2k+1)$

Exercice 3 :

Transformer les sommes suivantes sous la forme proposée entre parenthèses :

1. $\sum_{p=0}^9 a_{p+4}$ (forme : $\sum_{j=\square}^{\square} a_j$).
2. $\sum_{k=0}^5 b_{2k} + \sum_{j=0}^5 b_{2j+1}$ (forme : $\sum_{i=\square}^{\square} b_i$).
3. $\sum_{k=3}^8 a_k + \sum_{j=1}^6 b_{j-1}$ (forme : $\sum_{i=0}^{\square} a_{\square} + b_{\square}$).
4. $\sum_{k=0}^n x^{n-k}$ (forme : $\sum_{k=\square}^{\square} x^k$).
5. $\sum_{p=1}^5 p x^p$ (forme : $x \sum_{q=0}^{\square} \square x^q$).

Exercice 4 :

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

1. Déterminez deux nombres réels A et B (fixés) tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

2. En déduire S_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ de S_n .

Exercice 5 :

Calculez :

1. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 0 \leq j \leq 2}} i + 2j$
2. $\sum_{\substack{0 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq 2}} 2^{i+j}$
3. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 5} ij$
4. $\sum_{i+j=4} (-1)^{ij}$

Exercice 6 : Produit de sommes finies

Soient m, n deux entiers et $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux familles de réels (ou complexes). Montrez la formule suivante

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n b_j \right)$$

Exercice 7 :

Soit $q \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$. On se propose de démontrer la formule du cours sans utiliser de récurrence.

1. Calculez S_n pour $q = 1$
2. On suppose maintenant $q \neq 1$.
 - a) En faisant apparaître une somme télescopique, calculez $(1 - q)S_n$
 - b) En déduire que pour $q \neq 1$, on a $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
3. Exprimez en fonction de n la somme $\sum_{k=1}^n q^k$, puis $\sum_{k=p}^n q^k$ pour tout $p \leq n$.
4. Calculez les sommes doubles suivantes :

$$S = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n 2^{i+j} \text{ et } T = \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n 2^{i-j}$$

Exercice 8 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{4n + 1}{n(n + 1)(n + 2)}$.

1. Trouvez trois réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n + 1} + \frac{c}{n + 2}$
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 9 :

Exprimer à l'aide de la fonction factorielle les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^n (k^2); \quad \prod_{k=1}^n (2k) \text{ et } \prod_{k=0}^n (2k + 1).$$

Exercice 10 :

Déterminez les valeurs de $P_1 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ et de $P_2 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$