Durée de l'épreuve : 3h.
La calculatrice est interdite.

Lisez tout le sujet avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices. Le sujet est long, et l'exercice 6 ne doit être fait QUE SI tout le reste a été cherché entièrement.

Une importance particulière sera attribuée **à la rigueur de la rédaction et des justifications.**
Toute utilisation d'un théorème ou d'une formule devra être faite en vérifiant soigneusement que les hypothèses d'utilisation sont satisfaites.

Vos résultats devront être encadrés et des points peuvent être retirés si la copie n'est pas bien présentée : il vaut mieux en faire moins, mais le faire proprement.

Exercice 1 (Exercices de TD)

1. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

   (a) Déterminez deux nombres réels A et B (fixés) tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

   (b) En déduire S_n et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}$ de S_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

3. Soit la fonction f définie par
   $$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$
   Montrez que f est dérivable en 0 et précisez $f'(0)$.

4. Etudiez (ensemble de définition, de dérivation, tableau de variation, limites) la fonction f ci dessous
   $$f : x \mapsto \frac{x^2+3x+3}{x+2}.$$

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$$

(On pourra faire apparaitre une somme téléscopique).

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

1. Montrez que pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2. En déduire que

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

3. En déduire un encadrement de S_n , puis sa limite quand $n \to +\infty$.
   On pourra utiliser le fait que la limite d'un quotient de polynôme est la limite du quotient des termes de plus haut degré

Exercice 4 (Etudes de fonctions)

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = |x| \sin(x)$.
   (a) Justifiez que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculez $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
   (b) f est-elle dérivable en 0 ? Déterminez $f'(0)$ et donnez l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de g ?
   (b) Montrez que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ et calculez sa dérivée sur cet ensemble.
   (c) Donnez l'équation de la tangente à la courbe représentative de g pour $x = 0$.
   (d) g est-elle dérivable en 1 ? Donnez si elle(s) existe(nt) l'équation de la tangente ou des demi-tangentes en 1.
   (e) Justifiez que l'étude en -1 se déduit immédiatement de l'étude en 1.
   (f) Dressez le tableau de variation de g et proposez une représentation graphique en faisant apparaître les caractéristiques étudiées dans les questions c,d et e.

Exercice 5 (La fonction tangente hyperbolique)

On appelle "tangente hyperbolique" la fonction notée tanh, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette fonction, sa dérivée et sa bijection réciproque.

I) **Etude de tanh**

1. Montrer que tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa dérivée.
2. Etudier la parité de tanh.
3. Donnez le tableau de variations de tanh et préciser ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0.
5. Tracer l'allure du graphe de tanh ainsi que ses asymptotes éventuelles et sa tangente en A.

II) **Etude de argth**

1. Montrer que tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à déterminer.
2. On appelle $argth$ la bijection réciproque de tanh.
   (a) Sans calculer la dérivée, donner le tableau de variation de $argth$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = 1 - \big(\tanh(x)\big)^2$.
   (c) En déduire que $argth$ est dérivable sur I et calculez $(argth)'(x)$ pour tout $x \in I$.
3. Une particularité de $tanh$ est que l'on peut en réalité calculer explicitement sa bijection réciproque :
   (a) Vérifier que, pour tout réel x, $\quad \tanh(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
   (b) En déduire, en résolvant une équation, l'expression de $argth(y)$ en fonction de y, pour tout $y \in I$.
   (c) Justifier la dérivabilité et retrouvez le résultat obtenu à la question **2c**).

Exercice 6 (Si vous avez encore du temps !)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$

1. Justifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} \geq |x|$, puis que $\sqrt{1+x^2} - x \geq 0$
2. En déduire l'ensemble de définition de f.
3. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} + x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}$ et montrez que f est impaire.
4. Calculez $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5. Justifiez la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et calculez $f'(x)$.
6. En déduire que f est une bijection dont on précisera l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

Fin