Exercice 1 (Exercices de TD)

1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

   (a) Déterminez deux nombres réels A et B (fixés) tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

   (b) En déduire S_n et $\lim_{n\to+\infty}$ de S_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

3. Soit la fonction f définie par

   $$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

   Montrez que f est dérivable en 0 et précisez $f'(0)$.

4. Etudiez (ensemble de définition, de dérivation, tableau de variation, limites) la fonction f ci dessous

   $$f : x \mapsto \frac{x^2+3x+3}{x+2}.$$

Tous ces exercices ont été corrigés en TD.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$$

(On pourra faire apparaitre une somme téléscopique).

L'énoncé comportait une coquille fatale.... Je voulais dire

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k})$$

Il aurait suffit d'écrire que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$

On a alors une somme telescopique et donc $\boxed{S_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)}$

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

1. Montrez que pour tout $x \geq 0$,

   $$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2. En déduire que

   $$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

3. En déduire un encadrement de S_n , puis sa limite quand $n \to +\infty$.
   On pourra utiliser le fait que la limite d'un quotient de polynôme est la limite du quotient des termes de plus haut degré

---

1. L'égalité de droite est une propriété du cours : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

   Pour celle de gauche, posons pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

   (bien sûr, f a pour ensemble de définition $]-1, +\infty[$, mais ici, l'égalité est demandée pour $x \geq 0$)

   f est dérivable par composition et somme de fonction dérivable et on a

   $$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

   Comme $x \geq 0$, $f'(x)$ est positif et donc f est croissante sur $[0, +\infty[$

   Le minimum est donc atteint pour $x = 0$ et $f(0) = 0$

   Par conséquent, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, c'est à dire $\boxed{\ln(1+x) \geq x + \frac{x^2}{2}}$

2. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\frac{k}{n^2} \geq 0$: on peut donc remplacer x par $\frac{k}{n^2}$ dans l'encadrement obtenu précédemment.

   Comme $\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 = \frac{k^2}{n^4}$, on a bien :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \boxed{\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}}$$

3. On effectue maintenant la somme de ces inégalités, pour $k=1$ jusqu'à n, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}^2$$

   or $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$

   et $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$

   D'où l'encadrement :

$$\boxed{\frac{n+1}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}}$$

   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

   et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{12n^3} = 0$

   Ainsi par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}}$$

Exercice 4 (Etudes de fonctions)

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|\sin(x)$.
   (a) Justifiez que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculez $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
   (b) f est-elle dérivable en 0 ? Déterminez $f'(0)$ et donnez l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{|1-x^2|}$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de g ?
   (b) Montrez que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$ et calculez sa dérivée sur cet ensemble.
   (c) Donnez l'équation de la tangente à la courbe représentative de g pour $x=0$.
   (d) g est-elle dérivable en 1 ? Donnez si elle(s) existe(nt) l'équation de la tangente ou des demi-tangentes en 1.
   (e) Justifiez que l'étude en -1 se déduit immédiatement de l'étude en 1.
   (f) Dressez le tableau de variation de g et proposez une représentation graphique en faisant apparaître les caractéristiques étudiées dans les questions c,d et e.

---

1. (a) Par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   De plus, pour $x>0$, $f(x) = x\sin(x)$ d'où $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$, et pour $x<0$, $f(x) = -x\sin(x)$ et donc $f'(x) = -\sin(x) - x\cos(x)$.

   (b) On calcule le taux d'accroissement : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}\sin(x)$.
   En calculant à droite de 0 (où $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$) et à gauche de 0 (où $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$), on obtient $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, donc f est dérivable avec $f'(0) = 0$.
   Et comme $f(0) = 0$, il y a donc une tangente d'équation $y=0$.

2. (a) La valeur absolue garantit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|1-x^2| \geq 0$, donc que g est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour la forme, une rédaction complète : $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, $1 - x^2 \neq 0$ et donc par composition de fonctions dérivables, $x \mapsto |1 - x^2|$ est dérivable sur $x \in \mathbb{R} \setminus 1, -1$ et comme $|1 - x^2| \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composition de fonctions dérivables que g est dérivable sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

On distingue maintenant deux cas : pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $1 - x^2 < 0$, donc $|1 - x^2| = x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, d'où

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

Pour $x \in]-1, 1[$, on a $1 - x^2 > 0$, d'où $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

(c) g est dérivable en 0 : on applique la formule du cours et comme $g'(0) = 0$, on trouve une $\boxed{\text{tangente horizontale d'équation } y = 1}$

(d) On regarde le taux d'accroissement en 1 : $\dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \dfrac{\sqrt{|1 - x^2|}}{x - 1}$ Pour $x < 1$,

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x - 1} = \frac{\sqrt{(1 - x)(1 + x)}}{x - 1} = -\frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$$

D'où $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -\infty$

Donc g n'est pas dérivable en 1 et admet une demi tangente à gauche de 1, verticale, d'équation $x = 1$

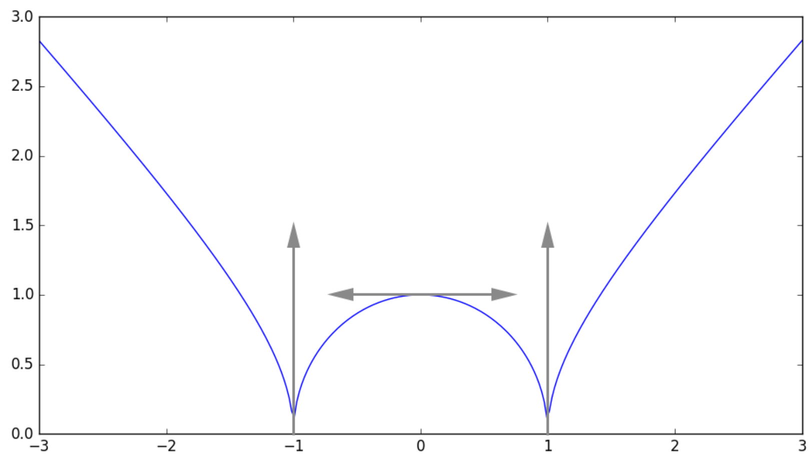
De même, on trouve $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = +\infty$: à nouveau une demi tangente à droite, d'équation $x = 1$.

(e) Comme pour tout x, $g(-x) = g(x)$ (on dit que g est paire), on déduit par symétrie que g n'est pas dérivable en -1 et admet également une tangente verticale en -1.

(f) D'après les résultats obtenus en b), on déduit

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Et on a la représentation graphique suivante :



Exercice 5 (La fonction tangente hyperbolique)

On appelle "tangente hyperbolique" la fonction notée tanh, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette fonction, sa dérivée et sa bijection réciproque.

I) **Etude de tanh**

1. Montrer que tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa dérivée.
2. Etudier la parité de tanh.
3. Donnez le tableau de variations de tanh et préciser ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0.
5. Tracer l'allure du graphe de tanh ainsi que ses asymptotes éventuelles et sa tangente en A.

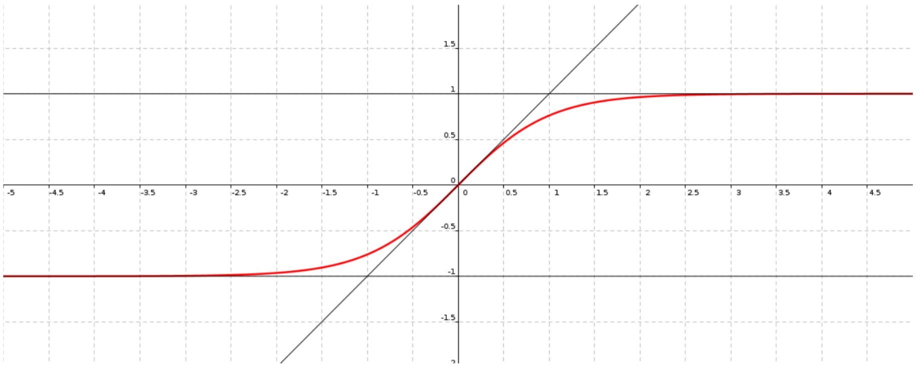
II) **Etude de argth**

1. Montrer que tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à déterminer.
2. On appelle $argth$ la bijection réciproque de tanh.
   (a) Sans calculer la dérivée, donner le tableau de variation de $argth$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = 1 - \big(\tanh(x)\big)^2$.
   (c) En déduire que $argth$ est dérivable sur I et calculez $(argth)'(x)$ pour tout $x \in I$.
3. Une particularité de $tanh$ est que l'on peut en réalité calculer explicitement sa bijection réciproque :
   (a) Vérifier que, pour tout réel x, $\quad \tanh(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
   (b) En déduire, en résolvant une équation, l'expression de $argth(y)$ en fonction de y, pour tout $y \in I$.
   (c) Justifier la dérivabilité et retrouvez le résultat obtenu à la question **2c)**.

Partie 1 : Etude de tanh

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$. La fonction est donc définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Le calcul donne :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tanh'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$
2. La fonction est définie sur un ensemble symétrique ($\mathbb{R}$) et on a $\tanh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}}$, c'est à dire $\tanh(-x) = -\tanh(x)$. La fonction est donc impaire.
3. Le calcul de la dérivée donne $\tanh'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $\mathbb{R}$, donc
   $\boxed{\text{L'application tanh est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$
   Pour les limites, plusieurs techniques possibles. Factoriser par e^x marche très bien, mais on peut aussi écrire :
   $$\tanh(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) \times e^{-x}}{(e^x + e^{-x}) \times e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$
   et $\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1}$
   Par ailleurs,
   $$\tanh(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) \times e^x}{(e^x + e^{-x}) \times e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$
   et $\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1}$
   Donc, la courbe $\mathcal{C}_{\tanh}$ a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ quand $x \to +\inf$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ quand $x \to -\infty$.
4. On a $\;f'(0) = 1\;$ et $\;f(0) = 0$, donc, d'après la formule donnant l'équation de la tangente,
   $\boxed{\text{la tangente à la courbe } \mathcal{C}_f \text{ en } (0;0) \text{ a pour équation } y = x.}$

5. Il s'agit de tracer 3 droites (deux asymptotes et une tangente).



La courbe ressemble un peu à arctan...

Partie 2 : Etude de $argth$

1. On sait que tanh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1.$$

Donc d'après le théorème de la bijection monotone,

$\boxed{\text{L'application tanh est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]-1;1[.}$

2. (a) On sait que la bijection réciproque est de même monotonie que la fonction de départ. D'où le tableau de $argth$:

x	-1		0		1
$argth$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

le fait que $argth(0) = 0$ n'était pas demandé, mais cela provient naturellement de $th(0) = 0$.

(b) On sait que $\tanh'(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ et on calcule $1 - (\tanh(x))^2$ en mettant sous le même dénominateur : cela nous donne le même résultat.
Conclusion :

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \tanh'(x) = 1 - (\tanh(x))^2.}$

(c) tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$, dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\tanh'(x) \neq 0$.
Donc $argth$ est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $y \in]-1;1[$, on a

$$(argth)'(y) = \frac{1}{\tanh'(argth(y))} = \frac{1}{1 - \left[tanh(argth(y))\right]^2} = \frac{1}{1-y^2}$$

car $tanh(argth^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in]-1;1[$. En conclusion :

$$\boxed{argth \text{ est dérivable sur }]-1;1[\text{ et, pour tout } y \in]-1;1[, \quad (argth)'(y) = \frac{1}{1-y^2}}$$

3. (a) Il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par e^x et on trouve la formule proposée.

(b) Soit $y \in]-1,1[$ quelconque, fixé. Résolvons l'équation $\tanh(x) = y$ où $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\tanh(x) = y &\iff \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \\
&\iff e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \\
&\iff e^{2x}(1-y) = 1+y \\
&\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\
&\iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y \in]-1,1[, \qquad argth(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$$

Remarque : le fait que $y \in]-1;1[$ garantit que $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$, donc qu'on peut appliquer le logarithme.

(c) $y \longmapsto \dfrac{1+y}{1-y}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et cette application est à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$
de plus $X \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(X)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$
donc par composition : $argth$ est dérivable sur $]-1,1[$
De plus, par dérivation d'une fonction composée :

$$(argth)'(y) = \frac{1}{2}\frac{\frac{1(1-y)-(1+y)(-1)}{(1-y)^2}}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-y)^2} \times \frac{1-y}{1+y}$$

Après simplification, on retrouve bien :

$$\boxed{\text{pour tout } y \in]-1;1[, \quad (argth)'(y) = \frac{1}{1-y^2}}$$

Exercice 6 (Si vous avez encore du temps !)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$

1. Justifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} \geq |x|$, puis que $\sqrt{1+x^2} - x \geq 0$
2. En déduire l'ensemble de définition de f.
3. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} + x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}$ et montrez que f est impaire.
4. Calculez $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Justifiez la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et calculez $f'(x)$.
6. En déduire que f est une bijection dont on précisera l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

---

1. Comme $x^2 + 1 \geq x^2$, on a $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$.
   De plus, $|x| \geq x$, donc $\sqrt{1+x^2} \geq x$, c'est à dire $\sqrt{1+x^2} - x \geq 0$
2. On a déjà que $\sqrt{1+x^2} - x \geq 0$, donc l'unique problème serait si cette expression vaut 0.
   Or, $\sqrt{1+x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x^2 \Rightarrow 1 + x^2 = x^2 \Rightarrow 1 = 0$: c'est absurde !
   Ainsi, l'argument du ln est toujours strictement positif et f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. On peut observer que $\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) = 1 + x^2 - x^2 = 1$, ce qui donne donc bien $\sqrt{1+x^2} - x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$
   De plus, $f(-x) = \ln(\sqrt{1+(-x)^2} + x) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}\right) = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x) = -f(x)$, donc f est impaire.
4. En $-\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   Par imparité, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

5. Par composition, somme et à nouveau composition de fonction dérivable, f est dérivable sur son ensemble de définition.

   On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} \\ &= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

6. D'après le calcul précédent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante. Elle est continue (par composition de fonction de continues) et elle constitue donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (au vue des limites obtenues en 4).

Fin