SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Exercices

1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln x$ et $f_n(0) = 0$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,a]$ pour tout $a \in]0,1[$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = e^{-nx^n}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f que l'on donnera.
2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur $[1,+\infty[$ et sur $[0,a]$ pour tout $a \in]0,1[$.

3 Étudier la convergence simple sur I, uniforme sur I puis uniforme sur tout segment inclus dans I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. $f_n : x \mapsto \dfrac{nx^2}{1+nx}$, $I = \mathbb{R}_+$
2. $f_n : x \mapsto \min\left(n, \dfrac{x^2}{n}\right)$, $I = \mathbb{R}$
3. $f_n : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right)$, $I = \mathbb{R}_+^*$
4. $f_n : x \mapsto \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ -nx+2 & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$, $I = [0,1]$
5. $f_n : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{n+x}{1+nx}\right)$, $I = \mathbb{R}_+^*$

4 Étudier selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$.

5 Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$. La convergence est-elle uniforme ?
3. Montrer que pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur la demi-droite $[a,+\infty[$.

6 On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_1(x) = \sin x,\quad \forall n \geqslant 2,\ u_n(x) = \sin u_{n-1}(x).$$

Montrer que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{7}$ Soit h une application continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto h(x)(\cos x)^n$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $a > 0$.
3. *Cas particulier 1 :* On suppose dans cette question que $h : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$.
   Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ et montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. *Cas particulier 2 :* On suppose dans cette question que $h : x \mapsto x \sin x$.
   En remarquant que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$, montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5. *Cas général :* Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la fonction h pour que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{8}$ *Approximation polynômiale de la racine carrée*
On définit par récurrence la suite (P_n) de polynômes par :

$$P_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $\big(P_n(x)\big)$ est croissante.
   En déduire que la suite (P_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction à déterminer.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0, 1]$: $0 \leqslant \sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.
4. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.
   Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle et en déduire la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite (P_n).

$\boxed{9}$ *Convergence uniforme et produit*

1. Montrer que si f et g sont deux fonctions bornées définies sur un intervalle I alors :
   $$\|fg\|_\infty^I \leqslant \|f\|_\infty^I \|g\|_\infty^I.$$
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions continues sur $[a, b]$ convergeant uniformément sur $[a, b]$ respectivement vers f et g.
   Montrer que $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers fg.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{x + n}$ et $g_n : x \mapsto x$.
   Montrer que les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent uniformément sur $[1, +\infty[$.
   La suite $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[1, +\infty[$?

$\boxed{10}$ *Limite uniforme de polynômes*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1.$$
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

$\boxed{11}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{xn^2 + 1}$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$ vers la fonction nulle. Que peut-on en déduire pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$?
3. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

$\boxed{12}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n + x}}$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?

$\boxed{13}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \leqslant \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1 - e^{-x})}.$$
En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{14}$ Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur I de la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ dans les cas suivants.

$$1.\ f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx^2}}{1 + n^2},\ I = \mathbb{R}, \qquad 2.\ f_n : x \mapsto x^n \ln x,\ I =]0, 1], \qquad 3.\ f_n : x \mapsto x^n \ln^2 x,\ I =]0, 1]$$

$\boxed{15}$ Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto n^\alpha x^n(1 - x)$.
Trouver les valeurs du réel α pour lesquelles la série de fonctions $\sum u_n$ est simplement convergente, uniformément convergente, normalement convergente sur $[0, 1]$.

$\boxed{16}$ Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{17}$ Montrer que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$. En déduire la valeur de cette somme.

$\boxed{18}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2}\arctan(nx)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$. En déduire que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S'\left(\dfrac{1}{N}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.
   En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

$\boxed{19}$ Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$ puis un équivalent de S en $+\infty$.

$\boxed{20}$ On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f et étudier la continuité de f sur D.
2. Montrer que f est strictement décroissante sur D.
3. Montrer que f est dérivable sur D.
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$ (on pourra utiliser une comparaison série-intégrale).

$\boxed{21}$

1. Justifier la définition de la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\cos^n x \sin(nx) \end{array}\right.$
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$. Calculer f' sous forme d'une somme infinie.
3. Montrer que : $\forall x \in]0,\pi[,\ f'(x) = -1$. En déduire f sur $]0,\pi[$.

$\boxed{22}$ On pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.