Formalisme, somme, appli, études de fonctions
DM 2

Exercice 1 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminez son ensemble de définition, son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
2. Donnez le tableau de variation de f, complété par les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Que déduire de ces limites ?
3. Donnez l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$.
4. Montrez que $g : x \mapsto f(x) - 1$ est une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$ en terme de symétrie ?
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ en faisant apparaitre les éléments repéré dans l'étude précédente.
6. Montrez que f est une bijection de l'ensemble $[-1, 1]$ vers un ensemble que vous préciserez.

---

1. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, on a $x^2 + 1 > 0$ et donc $x^2 + 1 \neq 0$, ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$. En outre, par quotient de fonctions dérivables, elle est dérivable et on a

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - (x^2+2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 2 \times \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

2. $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$, dont les racines sont 1 et -1.
De plus, pour $x \neq 0$ on peut écrire

$$f(x) = \frac{\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x^2}}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
En conséquence, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
Voici le tableau de variation de f, où on a ajouté la valeur en 0 en anticipation de la question 3 :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

3. La fonction f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 2$, d'où l'équation de la tangente :

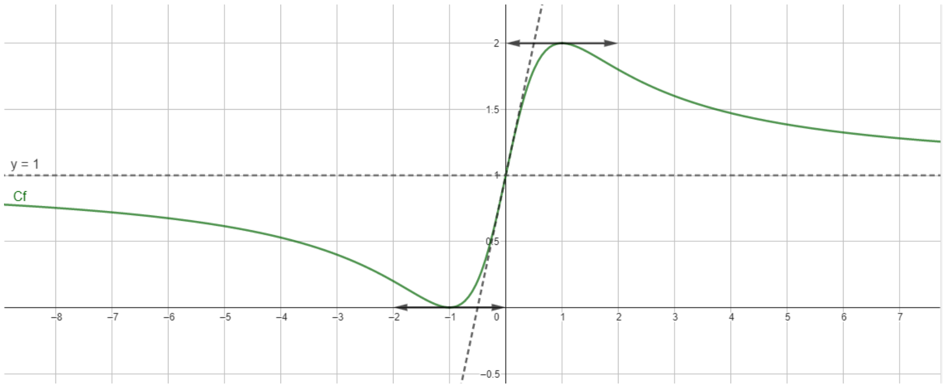
$$y = 2x + 1$$

4. Simplifions déjà l'expression de $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - 1 &= \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1 \\ &= \frac{x^2+2x+1-x^2-1}{x^2+1} \\ &= \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

On a alors simplement $g(-x) = \dfrac{-2x+1}{(-x)^2+1} = -\dfrac{2x}{x^2+1} = -g(x)$
Donc g est impaire.
On en déduit que la courbe de g, $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, 0)$.
Comme $f(x) = g(x) + 1$, on obtient $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $(0, 1)$ (on "monte" d'une unité).
Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, 1)$.

5. Voici un tracé de $\mathcal{C}_f$, via geogebra. On n'attend évidemment pas un dessin précis, mais on veut les tangentes (horizontale et à l'origine) et les asymptotes.



6. Comme pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) > 0$, on en déduit que f est strictement croissante sur $[-1,1]$.
   Elle constitue donc une bijection de $[-1,1]$ vers $f([-1,1])$. D'après l'étude précédente, et comme f est continue sur $[-1,1]$, on a $f([-1,1]) = [0,2]$.
   Ainsi, $f : [-1,1] \to [0,2]$ est une bijection.

Exercice 2 Soit un entier $n \geq 1$. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminez les valeurs des sommes suivantes en fonction de n :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

La somme S_1 est directement sous la forme du binôme de Newton (avec $a = 2$ et $b = (-1)$), ainsi

$$\boxed{S_1 = (2-1)^n = 1}$$

En prenant $a = b = 1$ dans la formule du binome, on obtient S_2 :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

Ainsi, $\boxed{S_2 = 2^n}$.
Pour S_3, on obtient

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n$$

C'est à dire $\boxed{S_3 = 3^n}$.
Avec $a = -1$ et $b = 1$, on obtient

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n$$

, donc $\boxed{S_4 = 0}$.

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Justifiez que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$.
4. Montrez enfin que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

---

1. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0\binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$: le terme pour $k=0$ vaut 0 et peut donc être ignoré dans la somme.
2. Remarquons déjà que $k \geq 1$, donc $k-1 \geq 0$ et $(k-1)!$ a un sens. Il suffit maintenant de vérifier ce qui est demandé en calculant et en arrangeant les calculs pour que cela marche :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Or, on peut écrire $n-k = n-1-k+1 = (n-1)-(k-1)$, d'où :

$$\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Conclusion : $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$.

3. Comme dans la somme considéré, $k \geq 1$, on peut utiliser la formule précédente.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

Notons que le "n" a pu être "sorti de la somme" car il n'est pas dépendant de k : il peut donc être factorisé.

4. En posant $i = k-1$, alors pour $k=1$, $i=0$ et pour $k=n$, $i=n-1$, ce qui donne $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$. On reconnait alors la somme S_2 de l'exercice 2, donnée pour $n-1$, d'où :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$$

On peut maintenant recoller les morceaux :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}$$