Algèbre - Chapitre 4

Nombres complexes

- Partie 1 : la forme algébrique -

I L'ensemble $\mathbb{C}$

1) Structure :

Définition :

On admet l'existence d'un nombre i (non réel) tel que $i^2 = -1$.
On appelle ensemble des **nombres complexes** , noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des éléments s'écrivant sous la forme $a + ib$ avec a et b deux réels.
Ainsi,

$$\mathbb{C} = \{a + ib; a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

Exemples :

- Les nombres $1 + i$, $2 - 3i$, $4i + 1$ sont des nombres complexes....
- Les nombres réels sont des nombres complexes (avec $b = 0$)
- Les nombres pour lesquels $a = 0$ (comme i, $3i$, $-i$) sont appellés **imaginaires pures**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires pures.

Theorème 1 :

Soit z un complexe. L'écriture $z = a + ib$ avec a et b **réels** est appelée "forme algébrique" et est unique, c'est-à-dire que si $a + ib = a' + ib'$, alors $a = a'$ et $b = b'$.

On dit alors que a est la **partie réelle** de z, notée $\text{Re}(z)$, et b est appellée la **partie imaginaire** notée $\text{Im}(z)$.

Deux nombres complexes z et z' sont donc égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

▷ *Preuve* : On admet. ◁

Exemples :

- $1 + 3i$ a pour partie réelle et pour partie imaginaire
- Soit $z = 2 - i$. Alors $\text{Re}(z) =$ et $\text{Im}(z) =$.
- Pour $z = 4$, on a $\text{Re}(z) =$ et $\text{Im}(z) =$
- $\text{Re}(3i) =$ et $\text{Im}(3i) =$

2) Calcul dans l'ensemble des complexes :

a) Opérations usuelles

Le calcul chez les nombres complexes est "hérité" du calcul chez les réels :

Définition :

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes (a, a', b et b' sont réels). On définit les opérations suivantes :

- **Addition :** $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- **Multiplication :** $zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$

Et on définit de même les **fractions** : $\dfrac{z}{z'}$ est le complexe qui, multiplié par z' donne z.

Exemples :

- $(1+2i)+(4-5i)=$
- $(1+2i)(4-5i)=$
- $\dfrac{1}{2+3i}=$
- $\dfrac{1-2i}{1+3i}=$

Méthode : Ecrire une fraction complexe sous forme algébrique

Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ deux nombres complexes.
Pour écrire le quotient $\dfrac{z}{z'}$ sous forme algébrique, il suffit de multiplier le numerateur et le dénominateur par $a'-ib'$.
Alors $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{(a+ib)(a'-ib')}{a^2+b^2}$ et il reste à développer le numerateur.

En définissant ainsi, donc en calculant comme chez les nombres réels, on obtient une structure identique à celle de $\mathbb{R}$: on appelle cela un **corps** :

Proposition 1 :

$\mathbb{C}$ est un corps, c'est-à-dire :

- $\mathbb{C}$ est stable pour $+$ et pour $\times$ (si on multiplie ou si on additionne deux complexes, on obtient un nombre complexe)
- $\mathbb{C}$ contient un neutre pour $+$: 0. (ajouter 0 ne fait rien)
- $\mathbb{C}$ contient un neutre pour $\times$: 1 (multiplier par 1 ne fait rien)
- Tout complexe z admet un opposé : il existe z' tel que $z+z'=0$. On le note $-z$.
- Tout complexe $z\neq 0$ admet un inverse : il existe z' tel que $zz'=1$. On le note $\dfrac{1}{z}$.
- $+$ et $\times$ sont commutatifs et associatifs
- $\times$ est distributif sur $+$.

▷ *Preuve* : On vérifie tout cela grâce à la définition de $\mathbb{C}$ et aux propriétés de $\mathbb{R}$... c'est assez fastidieux : on admet. ◁

Comme chez les réels et avec la même preuve, $\mathbb{C}$ est **intègre**, c'est à dire :

Theorème 2 :

Soit z et z' deux complexes. Alors :

$$zz'=0 \Longleftrightarrow z=0 \text{ ou } z'=0$$

b) Sommes et techniques

Les formules déjà obtenues pour les réels sont les mêmes chez les complexes, ainsi :

Proposition 2 :

Soient $a,b\in\mathbb{C}$, soit $n\in\mathbb{N}$, alors

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \text{ et, pour } n\geq 1,\ a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k n^{n-1-k}$$

$$\text{si } a\neq 1; \sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

De même, les systèmes à coefficients complexes se comportent de la même façon que les systèmes à coefficients réels. On pourra donc tout à fait utiliser le pivot de Gauss par exemple....

Danger ! **Absence de relation d'ordre**

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est totalement ordonné, c'est à dire que si on a deux réels x et y, alors $x \leq y$ ou $y \leq x$.
De plus, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.

On ne peut pas définir de telle relation d'ordre chez les complexes, en tout cas pas qui soit compatibles avec les opérations définies précédemment.

Essayons par exemple de comparer 0 et i.

Supposons par exemple que
$$i \geq 0$$
Alors en multipliant l'inégalité par i (qui serait positif), le signe de l'inégalité ne change pas, donc $i^2 \geq 0 \times i$, autrement dit $-1 \geq 0$! C'est absurde.

Supposons donc que $i \leq 0$. Alors en multipliant par i le signe change et à nouveau $-1 \geq 0$.

Dans les deux cas, on ne peut donc pas choisir le signe de i : définir un ordre sur $\mathbb{C}$ est impossible.

Conséquence :
On ne compare jamais deux complexes (à part pour dire "égaux" ou "différents") : il n'y a pas de complexe plus grand qu'un autre. En conséquence, on ne considèrera pas d'inéquations complexes, qui n'auraient de toute façon aucun sens, ni d'intervalles de complexes.

3) Représentation graphique : le plan complexe

Soit $\mathcal{P}$ le plan et soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$.
A chaque point M du plan de coordonnées (a, b) dans le repère $\mathcal{R}$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$.
Cette représentation est bijective : chaque complexe a un et un seul point qui lui est associée et réciproquement, chaque point a un et un seul complexe associé.

VOCABULAIRE

Si M a pour coordonnées (a, b) dans $\mathbb{R}^2$, $z = a + ib$ est appelé **affixe de** M.
Si un vecteur $\vec{u}$ a pour cordonnées (a, b) dans $\mathbb{R}^2$, on appelle également affixe de $\vec{u}$ le complexe $z = a + ib$.

Propriété 1 :
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives z et z', alors l'affixe de $\vec{u} + \vec{v}$ est $z + z'$.
De manière plus générale, si λ et μ sont deux réels, l'affixe de $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est $\lambda z + \mu z'$.

On dit alors que la représentation dans le plan complexe est linéaire, et on parle d'**isomorphisme** ("conserve la forme") entre le plan géométrique et l'ensemble $\mathbb{C}$. On confond ainsi les deux en parlant de **plan complexe**.

II Conjugaison et module :

1) Conjugaison :

Définition :

Soient a et b deux réels et soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Interprétation graphique :

Propriété 2 :

Soit z et z' deux complexes, alors :

(i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

(ii) $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ et si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

(iii) $\bar{\bar{z}} = z$

▷ *Preuve* :

◁

Avec exactement le même genre de preuve, on tire les formules ci dessous :

Propriété 3 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ d'écriture algébrique $z = a + ib$.

- ▶ $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ (donc $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$)
- ▶ $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- ▶ $z\bar{z} = a^2 + b^2$
- ▶ si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$

Enfin, la conjugaison permet des caractérisations intéressantes :

Proposition 3 :

- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$

▷ *Preuve* :

◁

2) Module

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **module** de z, noté $|z|$ le nombre réel suivant :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Au secours ! **MÊME NOTATION QUE LA VALEUR ABSOLUE !**

Supposons $z \in \mathbb{R}$, alors $z = z + i \times 0$.
La formule du module donne alors $|z| = \sqrt{z^2 + 0^2} = \sqrt{z^2}$
Or on a vu que pour tout réel x, $|x| = \sqrt{x^2}$: on peut donc bien utiliser la même notation.
Le module est donc un prolongement à $\mathbb{C}$ de la valeur absolue !

Interpréation géométrique :

3) Propriétés et formules autour du module :

Proposition 4 :

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
3. $|z| = |\bar{z}|$
4. $|zz'| = |z||z'|$ et si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
5. si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

▷ *Preuve* :

On détaille 2 et 5 :

2) : Posons $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$. Alors $|z|^2 = a^2 + b^2$. Comme $b^2 \geq 0$, on a $|z|^2 \geq a^2$. Ainsi $|z| \geq \sqrt{a^2}$ c'est à dire $|z| \geq |\operatorname{Re}(z)|$. On fait de même pour l'autre inégalité.

5) : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} \times \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

◁

Enfin, on dispose de l'inégalité suivante, déjà vraie pour la valeur absolue :

Theorème 3 : inégalité triangulaire

Soit z et z' deux complexes. Alors

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Avec égalité si et seulement si $z = 0$ ou $z' = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

III Equations algébriques

1) Racine d'une fonction polynomiale

Définition :

On appelle **fonction polynômiale** (ou polynôme) à coefficients complexes toute fonction P pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots a_n \in \mathbb{C}$ tels que,

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Une **equation algébrique** est une équation de la formule $P(z) = 0$ où P est un polynôme.

Les solutions de l'équation algébrique sont appelées **racines** du polynôme.

Exemple :
Les trinômes du second degré sont des polynômes de la forme $P(z) = az^2 + bz + c$.
Chercher les racines de P, c'est résoudre l'équation algébrique $az^2 + bz + c = 0$.

Proposition 5 :

Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes. Alors α est racine de P si et seulement si on peut écrire $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ avec Q une fonction polynomiale.

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6$.

2) Racine carrée d'un nombre complexe

Définition :

On appelle **racine carrée** d'un complexe z tout complexe u tel que $u^2 = z$

Exemple :

- Comme $i^2 = -1$, i est une racine carrée de -1. Mais $(-i)^2 = -1$ également. Donc $-i$ est également une racine carrée de -1.
- De manière générale, si $a \in \mathbb{R}$ avec $a < 0$, les racines carrées complexes de a sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$.

Au secours ! PLUSIEURS RACINES CARRÉES ?

Dans l'ensemble des complexes, à l'exception de 0, tous les complexes ont exactement deux racines carrées opposées.
On parlera donc toujours bien **d'une** racine carré de z, et non pas de **la** racine carrée....

Chercher une racine carré d'un complexe sous forme algébrique demande la résolution d'un système :

Méthode : CALCUL DES RACINES CARRÉS D'UN COMPLEXE SOUS FORME ALGÉBRIQUE

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour trouver $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = z$, on écrit $u = x + iy$ avec x et y réels.
Alors $u^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, et par unicité d'écriture dans $\mathbb{C}$

$$u^2 = z \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x^2 - y^2 & = a \\ 2xy & = b \end{array} \right.$$

De plus, $|u|^2 = |z|$, donc $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$
L'utilisation de ces **trois équations** permet de trouver les deux couples (x, y) qui conviennent.

Exemple :
Soit $z = 3 - 4i$.

3) Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

a) Forme canonique :

Définition :

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et soit P le polynôme définit par $P(z) = az^2 + bz + c$.
On appelle forme canonique de P le fait de trouver α et β tel que

$$az^2 + bz + c = a(z + \alpha)^2 + \beta$$

L'idée est de faire apparaitre une identité remarquable :

$$az^2 + bz + c = a(\underbrace{z^2 + \frac{b}{a}z}_{\substack{\text{début du} \\ \text{developpement} \\ \text{d'un carré}}} + \frac{c}{a})$$

Alors :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

On pose alors $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta \neq 0$, en notant δ une racine carré de Δ, on obtient une identité remarquable et il vient :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)$$

L'équation algébrique a donc deux racines distinctes $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$

Si $\Delta = 0$, alors $az^2 + bz + c = a\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ et on a une racine dite "double" $-\dfrac{b}{2a}$.

b) Racines d'un polynôme du second degré :

Theorème 4 :

Soient a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$.
Soit l'équation :

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors

- Si $\Delta = 0$, l'equation (E) a une unique solution : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) a deux solutions distinctes

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

où δ est une racine carré complexe de Δ.

Exemple :
Soit l'équation

$$(E) : 2z^2 - (9i+1)z - 7 + 11i = 0$$

Corolaire 1 :

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.
Soit l'équation :

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors

- Si $\Delta = 0$, l'equation (E) a une unique solution réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, l'équation (E) a deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) a deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple :
Soit l'équation

$$(E) : x^2 + x + 1 = 0$$

c) Lien entre les racines :

Proposition 6 :

Soient a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$ et soient r_1 et r_2 les deux racines (éventuellement confondues) de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

Alors $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$