Corrigé du DS n° 2.

Exercice 1 1. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

On a :

$$2\sin\left(\frac{2x}{5}\right) = -\sqrt{3} \iff \sin\left(\frac{2x}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\iff \sin\left(\frac{2x}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ll} & \frac{2x}{5} \equiv -\frac{\pi}{3} \mod 2\pi \\ \text{ou} & \frac{2x}{5} \equiv \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \mod 2\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} & x \equiv -\frac{5\pi}{6} \mod 5\pi \\ \text{ou} & x \equiv -\frac{5\pi}{3} \mod 5\pi \end{array}\right.$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{-\frac{5\pi}{6} + k5\pi,\ -\frac{5\pi}{3} + k5\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

2. — Le domaine de définition est $D = \{x \in \mathbb{R},\ \frac{x}{3} \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \not\equiv \frac{3\pi}{2} \mod 3\pi\}$.
   — Soit $x \in D$. Puisque la fonction tangente est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$, que $\tan(\pi/4) = 1$, et que la fonction tangente étant π-périodique, on a

$$\tan\left(\frac{x}{3}\right) > 1 \iff \frac{\pi}{4} < \frac{x}{3} < \frac{\pi}{2} \mod \pi$$
$$\iff \frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \mod 3\pi,$$

et $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\mod 3\pi}$.

Exercice 2 1. Le domaine de définition de l'inéquation est $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$ (puisque la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$). Soit $x \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$. Alors $x - 1, \sqrt{3x-5} \in \mathbb{R}_+$et la fonction $t \longmapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$x - 1 \geqslant \sqrt{3x-5} \iff (x-1)^2 \geqslant 3x - 5 \iff x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[,$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right[\cap (]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[) = \left[\frac{5}{3}, 2\right] \cup [3, +\infty[$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \left\{\begin{array}{c} 3x - 5 \geqslant 0 \\ x - 1 - \sqrt{3x-5} \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Autrement dit, le domaine de définition de f est égal à l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente, i.e. :

$$\mathcal{D}_f = \left[\frac{5}{3}, 2\right] \cup [3, +\infty[$$

3. La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est dérivable sur $]\frac{5}{3}, 2[\cup]3, +\infty[$ et :

$$\forall x \in \left]\frac{5}{3}, 2\right[\bigcup]3, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}}{2\sqrt{x - 1 - \sqrt{3x-5}}} = \frac{2\sqrt{3x-5} - 3}{4\sqrt{3x-5}\sqrt{x-1-\sqrt{3x-5}}}$$

Le dénominateur est clairement positif donc, pour tout $x \in]\frac{5}{3}, 2[\cup]3, +\infty[$, on a :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff 2\sqrt{3x-5} - 3 \geqslant 0 \iff \sqrt{3x-5} \geqslant \frac{3}{2} \iff 3x - 5 \geqslant \frac{9}{4} \iff x \geqslant \frac{29}{12}$$

où la dernière équivalence vient la stricte croissance de la fonction $t \longmapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ (appliquée aux nombres positifs $\sqrt{3x-5}$ et $\frac{3}{2}$).

En remarquant que $2 < \frac{29}{12} < 3$, on obtient le tableau de variations de f suivant :

x	$\frac{5}{3}$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

4. $\boxed{\text{Il y a exactement deux solutions}}$. En effet, la fonction f est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $[5/3, 2]$, donc $f : [5/3, 2] \longrightarrow [0, \sqrt{2/3}]$ est une bijection. Or, $2/3 \in \ [0, \sqrt{2/3}]$, donc il y a exactement une solution dans $[5/3, 2]$. De même, il y a exactement une solution dans $[3, +\infty[$. Ces deux solutions sont distinctes, et f n'étant pas définie sur $]2, 3[$, on a toutes les solutions.

Exercice 3 1. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$(x+iy)^2 = 5 - 12i \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = |5 - 12i| = \sqrt{169} = 13 \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(5 - 12i) = 5 \\ \text{signe(xy)} = \text{signe}(\mathrm{Im}(5 - 12i)) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases},$$

donc $\boxed{\text{les racines carrées de } 5 - 12i \text{ sont } \pm(3 - 2i)}$.

(b) Le discriminant de $z^2 - (1+4i)z + 5i - 5 = 0$ est $(1+4i)^2 - 4(5i - 5) = 5 - 12i$, dont une racine carrée est $3 - 2i$, donc $\boxed{\text{les solutions de l'équation sont } -1 + 3i \text{ et } 2 + i}$.

2. (a) On a $|-2 + 2i\sqrt{3}| = 2|-1 + i\sqrt{3}| = 4$, donc

$$-2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{4e^{i2\pi/3}}.$$

(b) Une racine quatrième de a est donc $\sqrt[4]{4}e^{i\pi/6} = \sqrt{2}e^{i\pi/6}$. Or, les racines quatrièmes de l'unité sont $\pm 1, \pm i$, donc $\boxed{\text{les racines quatrièmes de } a \text{ sont } \pm\sqrt{2}e^{i\pi/6},\ \pm i\sqrt{2}e^{i\pi/6}}$.

Sous forme trigonométrique, on obtient $\boxed{\sqrt{2}e^{i\pi/6},\ \sqrt{2}e^{-5i\pi/6},\ \sqrt{2}e^{2i\pi/3},\ \sqrt{2}e^{-i\pi/3}}$.

(c) i. L'équation $u^2 + 4u + 16 = 0$ a pour discriminant $-3 \times 16 = (4i\sqrt{3})^2$, et $\boxed{\text{ses racines sont } a \text{ et } \overline{a}}$.

ii. On a, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^8 + 4z + 16 = 0 \iff \begin{cases} u^2 + 4u + 16 = 0 \\ z^4 = u \end{cases} \iff z^4 = a \text{ ou } z^4 = \overline{a},$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\sqrt{2}e^{\pm i\pi/6},\ \sqrt{2}e^{\pm 5i\pi/6},\ \sqrt{2}e^{\pm 2i\pi/3},\ \sqrt{2}e^{\pm i\pi/3}}$.

Exercice 4 1. On doit montrer que si $x \in \mathbb{R}$, $1 - ix \neq 0$: cela découle de $\mathrm{Re}(1 - ix) = 1 \neq 0$, donc $1 - ix \neq 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$|f(x)|^2 = \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|^2 = \frac{|1+ix|^2}{|1-ix|^2} \overset{x\in\mathbb{R}}{=} \frac{1+x^2}{1+(-x)^2} = 1,$$
donc $f(x) \in U$.
Mais si $f(x) = -1$, alors $1 + ix = -(1 - ix)$, donc $1 = -1$: contradiction. On a bien $f(x) \in U \setminus \{-1\}$.

3. On veut montrer que pour tout $u \in U \setminus \{-1\}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = u$.
On fixe $u \in U \setminus \{-1\}$, et on résout l'équation $u = g(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} u = g(x) &\overset{1-ix\neq 0}{\iff} 1 + ix = u(1 - ix) \iff i(u+1)x = u - 1 \\ &\overset{u\neq -1}{\iff} x = \frac{u-1}{i(u+1)} = i\frac{1-u}{1+u} \end{aligned}$$
Pour montrer que g est bijective, il reste à montrer que $i\frac{1-u}{1+u} \in \mathbb{R}$. Or, il existe $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que $u = e^{i\theta}$, et
$$i\frac{1-u}{1+u} = i\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = i\frac{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})} = i\frac{2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} = -\tan(\theta/2) \in \mathbb{R},$$
donc pour tout $u \in U \setminus \{-1\}$, l'équation $u = g(x)$ admet une et une seule solution $x \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{g \text{ est bijective}}$ et $\boxed{\forall\, u \in U \setminus \{-1\},\ g^{-1}(u) = i\frac{1-u}{1+u}}$.

Problème - Minimum d'une somme de distances

1. Si $z = 0$ ou $z' = 0$, les deux affirmations sont vraies donc équivalentes. Supposons alors $z, z' \neq 0$.
   — Si par exemple $z' = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $\overline{z}z' = \lambda|z|^2 \in \mathbb{R}_+$.
   — Réciproquement, si $\overline{z}z' = \mu \in \mathbb{R}_+$, alors $z' = \frac{\mu}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$, donc $z' = \frac{\mu}{|z|^2}z$ et $\frac{\mu}{|z|^2} \in \mathbb{R}_+$.

2. Les arguments de z et de z' sont bien définis puisqu'ils sont non nuls. Notons θ et θ' des arguments respectifs de z et de z'.
Un argument de $\bar{z}z'$ est $\theta' - \theta$: $\bar{z}z'$ est un réel positif (non nul) si et seulement si $\theta' - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, i.e. z et z' ont mêmes arguments.

3. (a) On montre ce résultat par récurrence pour $n \geqslant 2$. C'est l'inégalité triangulaire au rang 2 , et, si on le suppose vrai au rang n fixé, alors
$$|z_1 + \cdots + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|\,,$$
par hypothèse de récurrence et l'inégalité triangulaire.
Le résultat est donc bien établi.

   (b) Le cas d'égalité se traite encore bien par récurrence : il est connu au rang 2 , et, si on le suppose vrai à un rang n fixé, alors, si $z_1 + \cdots + z_{n+1}| = |z_1| + \cdots |z_{n+1}|$, on a alors
$$|z_1 + \cdots + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}| = |z_1 + \cdots + z_{n+1}|\,,$$
donc $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$, donc, par hypothèse de récurrence, $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}_+$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Mais on peut bien entendu refaire la même chose en remplaçant z_{n+1} par z_i, $i = 1, \ldots, n$, donc $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}_+$, pour tous $i, j \in [\![1, n+1]\!]$.
Réciproquement, si $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}_+$, pour tous $i, j \in [\![1, n+1]\!]$, alors
$$(\overline{z_1 + \cdots + z_n})z_{n+1} = (\overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n})z_{n+1} = \overline{z_1}z_{n+1} + \cdots + \overline{z_n}z_{n+1} \in \mathbb{R}_+,$$
donc $|z_1 + \cdots + z_{n+1}| = |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}|$ par le cas $n = 2$. Et ainsi de suite on obtient l'égalité.

Partie 2

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} S(z) &= \bar{a}_1 (z_1 - z) + \cdots + \bar{a}_n (z_n - z) \\ &= \bar{a}_1 z_1 + \cdots + \bar{a}_n z_n - z (\bar{a}_1 + \cdots + \bar{a}_n) \\ &= \frac{\bar{z}_1}{|z_1|} z_1 + \cdots + \frac{\bar{z}_n}{|z_n|} z_n \\ &= |z_1| + \cdots + |z_n| \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\boxed{S(z) = |z_1| + \cdots + |z_n|}$.

2. D'après la question 1, $S(z) \in \mathbb{R}_+$, et donc d'après l'inégalité triangulaire généralisée, on a :

$$\begin{aligned} |z_1| + \cdots + |z_n| = S(z) = |S(z)| &= |\bar{a}_1 (z_1 - z) + \cdots + \bar{a}_n (z_n - z)| \\ &\leqslant |\bar{a}_1| \, |z_1 - z| + \cdots + |\bar{a}_n| \, |z_n - z| \\ &= |z - z_1| + \cdots + |z - z_n| \, . \end{aligned}$$

3. On suppose tout d'abord z différent de tous les z_i.
À la question précédente, l'inégalité est une égalité si et seulement si l'inégalité intermédiaire dans le calcul est une égalité, c'est-à-dire, d'après I.3(b), si et seulement si $\bar{a}_1 (z_1 - z), \ldots, \bar{a}_n (z_n - z)$ ont mêmes arguments (ils sont tous non nuls). Des nombres ayant mêmes arguments ont mêmes arguments que leur somme. Or, $\bar{a}_1 (z_1 - z) + \cdots + \bar{a}_n (z_n - z) = S(z) \in \mathbb{R}_+^*$ admet 0 pour argument. On a donc égalité si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \bar{a}_k (z_k - z) \in \mathbb{R}_+.$$

Comme $\bar{z}_k (z_k - z) = |z_k| \overline{a_k} (z_k - z)$, on a bien l'équivalence demandée.
Lorsque z est égal à un des z_i, le même argument avec un terme en moins donne le même résultat.

Partie 3

1. (a) Notons, pour tout $i \in [\![1, n]\!], \vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{ON_i}}{ON_i}$, et on a

$$f(N) = |z - z_1| + \cdots + |z - z_n| \quad \text{et} \quad f(O) = |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

La question II.2 montre que, dans le cas où $\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n = \overrightarrow{0}$, la fonction f admet un minimum qui est atteint en O.

(b) La question II.3 montre que f atteint son minimum en N si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\bar{z}_k (z_k - z) \in \mathbb{R}_+$.
Or, N est sur la demi-droite d'origine M_k passant par O si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\overrightarrow{M_k N} = \lambda \overrightarrow{M_k O}$, ou encore si et seulement si $z_k - z = \lambda z_k$, ou encore $\overline{z_k}(z_k - z) = \lambda |z_k|^2 \in \mathbb{R}_+$, et donc

$\boxed{f(N) \text{ est le minimum si et seulement si } N \text{ est sur toutes les demi-droites issues de } M_k \text{ et passant par l'origine}}$

2. (a) $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines n-ièmes de l'unité. On a donc $a_i = z_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et $z_1 + \cdots + z_n = 0$ (somme des racines n-ème de l'unité). On peut donc appliquer $(\star)$: pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$n \leqslant |z_1 - z| + \cdots + |z_n - z| \, .$$

(b) En prenant $z=1$, on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$|z_k - 1| = \left|e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n})\right| = 2|\sin(k\pi/n)| = 2\sin(k\pi/n)$$

car $0 \leqslant k\pi/n \leqslant \pi$), on obtient $\frac{n}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. L'inégalité $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqslant n$ vient de $\sin(x) \leqslant 1$.

(c) On a, puisque $e^{i\pi/n} \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \frac{\left(e^{i\pi/n}\right)^n - 1}{e^{i\pi/n} - 1} = -\frac{2}{e^{i\pi/2n}\left(e^{i\pi/2n} - e^{-i\pi/2n}\right)} = i\frac{e^{-i\pi/2n}}{\sin(\pi/2n)},$$

d'où, en prenant les parties imaginaires :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan(\pi/2n)}$$

et d'après la question précédente on a $\frac{1}{n} \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leqslant \frac{2}{n}$.

Exercice 5 On remarque tout d'abord que cette équation n'a de sens que si $m \in [-1,1]$. On fixe alors $m \in [-1,1]$, et il existe donc un unique $\alpha \in [0,\pi]$ tel que $m = \cos(\alpha)$, et alors $\sqrt{1-m^2} = |\sin(\alpha)| = \sin(\alpha)$ (car $\sin(\alpha) \geqslant 0$ si $\alpha \in [0,\pi]$). L'équation est alors équivalente à

$$\cos(x-\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).$$

Or, on remarque que

$$4\cos^3(\alpha) = \left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\alpha} + 3e^{i\alpha} + 3e^{-i\alpha} + e^{-3i\alpha}}{2} = \cos(3\alpha) + 3\cos(\alpha),$$

et donc $\boxed{4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) = \cos(3\alpha)}$, et l'équation est équivalente à $\cos(x-\alpha) = \cos(3\alpha)$. La résolution est alors classique :

$$\cos(x-\alpha) = \cos(3\alpha) \iff \left\{\begin{array}{l} x-\alpha \equiv 3\alpha \mod 2\pi \\ \text{ou} \\ x-\alpha \equiv -3\alpha \mod 2\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv 4\alpha \mod 2\pi \\ \text{ou} \\ x \equiv -2\alpha \mod 2\pi \end{array}\right.,$$

d'où la conclusion finale : $\boxed{\text{L'équation admet des solutions si et seulement si } m \in [-1,1]}$. De plus : $\boxed{\text{si } m = \cos(\alpha) \text{ pour } \alpha \in [0,\pi]\text{, l'ensemble des solutions est } \{4\alpha + 2k\pi;\ -2\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.