3.2 Diffusion de particules-Exercice 13

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique ρ, dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse m, de masse volumique $\rho_0 > \rho$ et de masse molaire M.
La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date t = 0. A partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent lentement vers le fond du récipient.
Les macromolécules sont soumises à une force de frottement, due à la viscosité η de l'eau, dont l'expression est donnée par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ où R est le rayon des macromolécules et $\vec{v}$ leur vitesse.
On note Oz l'axe vertical ascendant avec l'origine au fond du récipient.

a-Quelles sont les trois forces auxquelles est soumise chaque macromolécule ?
En déduire l'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule et montrer que ces particules atteignent une vitesse limite $\vec{v}_\ell$.

b-Cette vitesse limite étant atteinte rapidement, exprimer le vecteur densité de courant de particules $\vec{j}_E$ associé à ce mouvement d'entraînement, en fonction de la concentration molaire c(z) et de la vitesse limite.

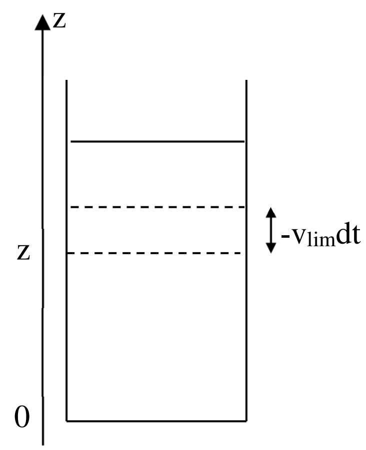
c-Justifier qu'il existe un courant ascendant $\vec{j}_D$ de particules. On note D le coefficient de diffusion.

d-Calculer la concentration molaire c(z) en régime permanent.

e-On donne : $\dfrac{\rho}{\rho_0} = 0{,}8$; $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$; relation d'Einstein $D = \dfrac{k_B T}{6\pi\eta R}$ où k_B est la constante de Boltzmann.
Des mesures optiques montrent qu'à 25°C : c(z = 0) = 2c(z =2cm).
En déduire la masse molaire M des macromolécules.

---

a-Une macromolécule M est soumise à son poids, la poussée d'Archimède et la force de frottement.



Principe fondamental de la dynamique selon Oz : $m\dot{v} = -mg + \rho\dfrac{4}{3}\pi R^3 g - 6\pi\eta R v$

Sachant que $\dfrac{4}{3}\pi R^3 g = \dfrac{m}{\rho_0}$, on a : $\dot{v} + \dfrac{6\pi\eta R}{m}v = g(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1)$

La vitesse limite est atteinte quand $\dot{v} = 0$: $v_\ell = \dfrac{mg}{6\pi\eta R}(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1) < 0$

Soit vectoriellement : $\boxed{\vec{v}_\ell = \dfrac{mg}{6\pi\eta R}(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1)\vec{u}_z}$

b-Le nombre de particules qui traversent la section S de cote z, orientée selon $-\vec{e}_z$
est : $dN = N_A c(z).S.(-v_{lim})dt$
Par définition de $\vec{j}_E$: $dN = \vec{j}_E.(-S\vec{e}_z)dt = -j_E S dt$
D'où : $j_E = N_A c(z) v_{lim}$ et $\boxed{\vec{j}_E = N_A c(z)\vec{v}_{lim}}$

c-A cause du mouvement d'entraînement, les macromolécules sont plus concentrées au fond du récipient qu'au-dessus Il y aura alors un <u>phénomène de diffusion</u> vers le haut.

Loi de Fick : $\boxed{\vec{j}_D = -D\,\overrightarrow{grad}(N_A c(z)) = -DN_A\dfrac{dc}{dz}\vec{e}_z}$

d- En régime stationnaire, le flux net de particules à travers la section de cote z est nul : $\vec{j}_E + \vec{j}_D = \vec{0}$

Selon Oz : $-D\dfrac{dc}{dz} + cv_{lim} = 0$ soit : $\dfrac{dc}{dz} - \dfrac{v_{lim}}{D}c = 0$

La solution est : $\boxed{c(z) = c(0)e^{-\frac{z}{h}}}$ avec $h = -\dfrac{D}{v_{lim}} = -\dfrac{D6\pi\eta R\rho_0}{mg(\rho - \rho_0)} = -\dfrac{k_B T\rho_0}{\dfrac{M}{N_A}g(\rho - \rho_0)} = \dfrac{N_A k_B T}{Mg(1 - \dfrac{\rho}{\rho_0})}$

e- c(z = 0) = 2c(z =2cm) => $e^{-\frac{z}{h}} = \dfrac{1}{2}$ => $h = z/\ln 2 = 2{,}88.10^{-2}$ m d'où : <u>$M = 4{,}38.10^3\ kg.mol^{-1}$</u>
