

Corrigé du devoir surveillé n° 3

Exercice 1. Modélisation du captage du courant dans un TGV

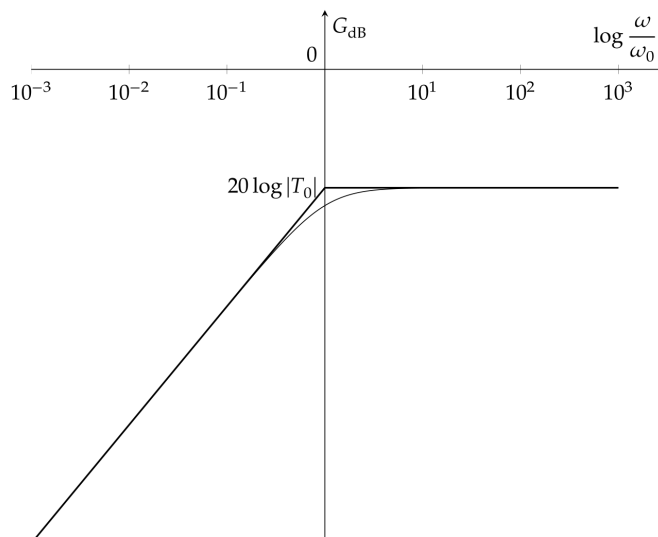
3. $R_1 = xr$ et $R_2 = (L - x)r$ sont en parallèle d'où $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{x(L - x)}{L}r$.
4. R_e est maximale pour $x = \frac{L}{2}$.
5. $R_e = \frac{L}{4}r = 0.050 \Omega$ (deux chiffres significatifs).
6. $U_R = R_e I = 1.3 \times 10^2 \text{ V}$.
7. La puissance fournie par les sources est UI . La puissance consommée par la motrice est $(U - U_R)I$. On a donc un rendement $\rho = \frac{U - U_R}{U} = 92\%$.
- Lorsque la motrice est en A ou B , $R_e = 0$. Il n'y a donc pas de chute de potentiel due à la résistance et le rendement vaut 1 !

Exercice 2. Capteur de position**III.A Capteur à entrefer variable "push-pull"**

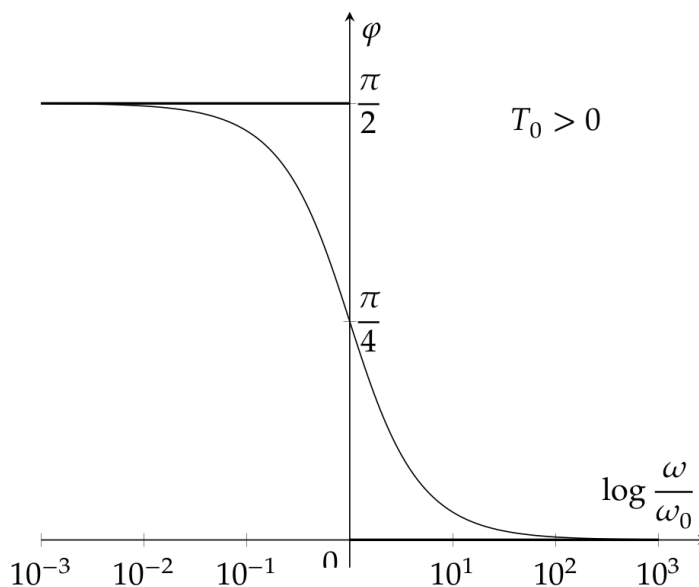
- III.A24. Il suffit de remplacer δ par $\delta \pm \Delta z$ dans l'expression de L_e et de faire les développements limités à l'ordre 1 en $\frac{\Delta z}{\delta}$ pour obtenir $L_1 = \frac{\mu_0 N_C^2 S}{2(\delta - \Delta z)} \simeq L_e \left(1 + \frac{\Delta z}{\delta}\right)$ et $L_2 = \frac{\mu_0 N_C^2 S}{2(\delta + \Delta z)} \simeq L_e \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right)$.

III.B Mesure des variations d'inductance

- III.B25. Les dipôles étant tous en série on peut utiliser la loi du diviseur de tension qui donne $\underline{u}_1 = \frac{jL_1\omega}{R + j(L_1 + L_2)\omega} \underline{e}$ et $\underline{u}_2 = \frac{jL_2\omega}{R + j(L_1 + L_2)\omega} \underline{e}$.
- III.B26. Comme $i_+ = 0$ on peut utiliser un diviseur de tension qui donne $\underline{V}_+ = \frac{R_1}{2R_1} \underline{u}_1 = \frac{\underline{u}_1}{2}$.
De même, soit par l'application du diviseur de tension, ou par la loi des nœuds exprimée en termes de potentiels on établit $\underline{V}_- = \frac{1}{2}(\underline{u}_2 + \underline{u}_s)$.
Enfin d'après $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ il vient $\underline{u}_s = \underline{u}_1 - \underline{u}_2$, ce qui est bien de la forme attendue avec $K = 1$.
- III.B27. En reportant les expressions de \underline{u}_1 et \underline{u}_2 on obtient $\underline{u}_s = \frac{j(L_1 - L_2)\omega}{R + j(L_1 + L_2)\omega} \underline{e}$, ce qui se réécrit sous la forme $\underline{T}(j\omega) = \frac{\Delta z}{\delta} \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$ en posant $\omega_0 = \frac{R}{2L_e}$. On a alors $T_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$.
- III.B28. L'allure est donnée ci-après et se détermine facilement par l'étude en basse et haute fréquences de la fonction de transfert. On peut noter que le gain réel dans la bande passante ne vaut pas 1 mais T_0 , et dépend donc de Δz !



Par ailleurs il y a une petite subtilité pour la phase. En effet il faut distinguer le cas $T_0 > 0$ du cas $T_0 < 0$. Le deuxième cas se déduit du premier par une translation de la courbe de π (vers le bas ou vers le haut...)



III.B29. Il s'agit d'un filtre passe-haut.

III.B30. La pulsation ω_0 est clairement (mais il faut le justifier...) la pulsation de coupure.

III.B31. Il faut se placer à des pulsations nettement supérieures à ω_0 et alors $T \simeq T_0$!

III.B32. On calcule une fréquence de coupure $f_0 = 0.99$ kHz. Dès lors la fréquence f est dans la bande passante. Le gain y est égal à $T_0 \frac{4}{\sqrt{17}} \simeq T_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$. On a donc bien $u_s(t) = E \frac{\Delta z}{\delta} \cos(\omega t + \varphi)$.

III.B33. La phase se calcule par l'argument de la fonction de transfert. On obtient $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = 0.2 \text{ rad} = 14^\circ$.

III.C Mesure des variations d'inductance

III.C34. $s_m(t) = K_m e(t) u_s(t) = K_m E^2 \frac{\Delta z}{\delta} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} K_m E^2 \frac{\Delta z}{\delta} (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi))$.

Le spectre contient donc deux raies de même amplitude $\frac{1}{2}K_m E^2 \frac{\Delta z}{\delta}$, l'une à la pulsation nulle, l'autre à la pulsation 2ω .

En fait les deux raies sont porteuses par l'intermédiaire de l'amplitude d'une information relative au déplacement... Je pense compte tenu de la suite que l'énoncé fait plutôt allusion à la composante continue... Pour cette dernière on peut d'ailleurs noter que $\cos \varphi = 0.97 \simeq 1$, approximation que l'on utilisera dans la suite.

- III.C35. Pour obtenir une tension continue on va placer un filtre passe-bas de fréquence de coupure très inférieure à 8 kHz. On aura intérêt à prendre un gain statique égal à 1. On obtiendra alors une tension continue de valeur $\frac{1}{2}K_m E^2 \frac{\Delta z}{\delta}$ qui est bien proportionnelle au déplacement Δz .
- III.C36. Même si la notation n'est pas explicitée on peut comprendre que ΔS_m est la variation à partir de 0 de S_m pour quand z varie de Δz . D'après la relation précédente il vient $\frac{\Delta S_m}{\Delta z} = \frac{K_m E^2}{2\delta}$.
- III.C37. L'écart relatif recherchée est la valeur de $\frac{\Delta z}{\delta}$ pour $\Delta S_m = 10 \text{ mV}$, soit ici $\frac{2}{K_m E^2} = 5.6 \times 10^{-4}$, soit 0.056 % ! Pas mal...

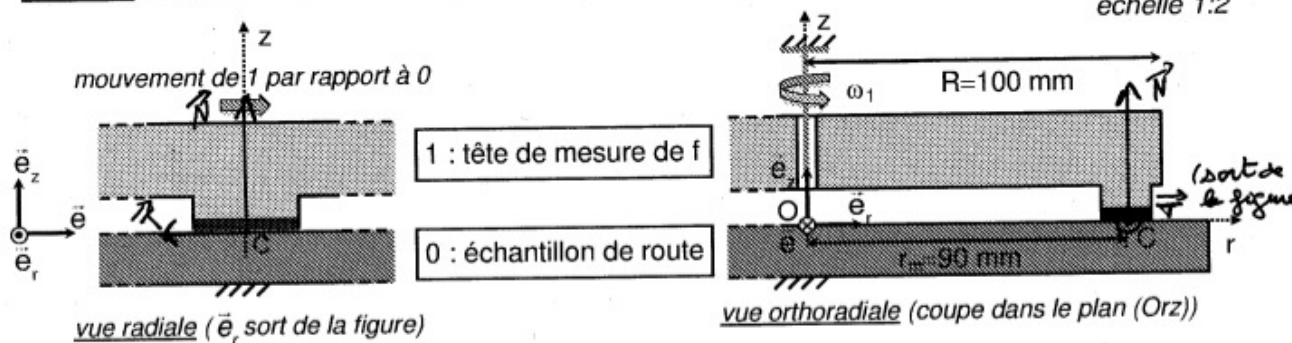
Problème III. Machine de Wehner et Schulze. E3A 2014 MP

III.D Mesure du coefficient de frottement

III.D1. Voir figure ci-dessous :

Document-réponse « Mécanique », à compléter et rendre avec la copie

Figure D : Tête de mesure du coefficient de frottement (un seul patin est représenté) échelle 1:2



- III.D2. Dans une situation de glissement, la vitesse de glissement est non nulle et $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$. \vec{T} est anticollinéaire à la vitesse de glissement.
- Dans une situation de non glissement, la vitesse de glissement est nulle et $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|$.
- Ici tant qu'il y a glissement, la vitesse de glissement est selon $+\vec{e}_\theta$, et donc :

$$\vec{T} = -fN\vec{e}_\theta.$$

- III.D3. La tête n'a pas de mouvement selon la verticale. Les composantes normales compensent donc le poids (en supposant qu'il n'y ait aucune autre force de soutien). Par symétrie on a donc $3N = mg$, soit

$$N = \frac{mg}{3}.$$

Il vient donc

$$T = \frac{fmg}{3}.$$

III.D4. On a facilement

$$M_{\vec{T}, Oz} = -r_m T = -\frac{r_m fmg}{3}.$$

III.D5. On a immédiatement $\omega_{1,i} = \frac{v_{C,1/O,i}}{r_m} = 3.1 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}$

III.D6. L'application du théorème du moment cinétique scalaire à la tête de mesure en projection sur Oz donne directement (en prenant en compte les trois patins!) :

$$\frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega_1}{dt} = 3 M_{\vec{T}, Oz} = -r_m fmg.$$

III.D7. L'intégration est immédiate et donne

$$\omega_1(t) = \omega_{1,i} - \frac{2r_m f g}{R^2} t.$$

L'allure est celle d'un segment de droite de pente négative suivi à partir de l'instant $t = \tau$ calculé dans la question suivante, d'une demi droite horizontale, de valeur nulle (la tête de mesure est immobile!).

Elle est donnée plus loin avec une autre question.

III.D8. Il suffit de résoudre $\omega_1(\tau) = 0$, ce qui donne immédiatement

$$\tau = \frac{\omega_{1,i} R^2}{2r_m f g}.$$

Cette valeur ne dépend pas de m , c'est évident. Elle ne dépend pas non plus du nombre de patins (il suffit d'essayer avec n patins pour voir que les n se simplifient (ce qui est évident physiquement...))

III.D9. L'application numérique donne

$$f = 0.42.$$

C'est une valeur assez élevée, mais tout à fait raisonnable pour du caoutchouc sur un revêtement routier.

III.D10. Si le disque est immobile c'est que la somme des moments qui s'exercent sur lui selon Oz est nul. Il y a le moment M_0 et l'opposé du moment calculé plus haut, multiplié par 3 car il y a trois patins. Au total on a $0 = M_0 - 3M_{\vec{T}, Oz}$. La mesure de M_0 permet d'écrire

$$M_0 = -3 \frac{r_m fmg}{3}, \text{ d'où}$$

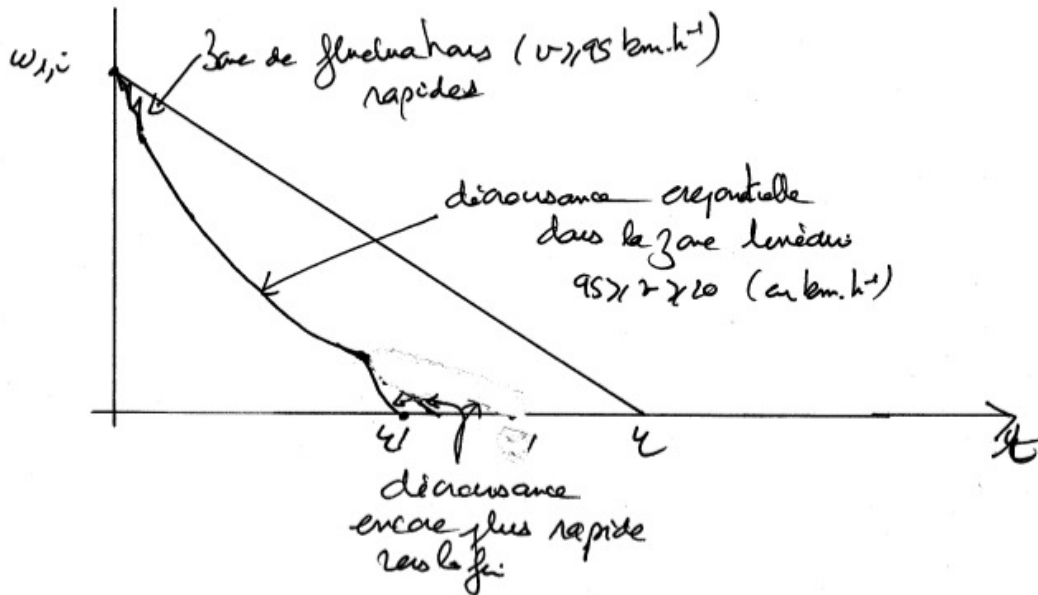
$$f = -\frac{M_0}{r_m mg}.$$

III.D11. On constate qu'au début, lorsque la vitesse est encore élevée (vitesse supérieure à 95 km h^{-1}), f présente des oscillations! Ceci est sans doute dû à une phase de rebond de la tête sur l'échantillon. Les mesures de f dans cette partie de la courbe ne sont sans doute pas pertinentes.

Ensuite la vitesse décroît jusqu'à environ 20 km h^{-1} , et on constate que le coefficient de frottement augmente légèrement, de manière presque linéaire (et donc f diminue lorsque la vitesse de glissement augmente). Ceci n'est pas du tout prévu par les lois de Coulomb, qui sont trop simplistes en l'espèce!

Quand la vitesse devient faible, on note une forte augmentation de f pour atteindre une valeur proche de la valeur statique, qu'on peut estimer aux alentours de 0.9, ce qui est relativement élevé! Là aussi ce comportement n'est pas prévu par les lois de Coulomb.

- III.D12. L'allure est donnée sur la figure suivante avec quelques justifications. En particulier le temps d'arrêt est plus court que dans l'hypothèse $f = Cte = 0,4$.



- III.D13. On a $\theta_p = \frac{2b}{r_1 + r_2} = 0.33 \text{ rad}$, ou encore 19° .

La surface du patin est $S = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \theta_p = 4.2 \times 10^2 \text{ mm}^2$, d'où une pression

$$P_A = \frac{N}{S} = \frac{mg}{3S} = 2.0 \text{ bar}.$$

- III.D14. Un élément de surface dS du patin, à la distance r de l'axe, est soumis à une composante normale élémentaire $dN = P_A dS$, et donc à une composante tangentielle $dT = f dN = f P_A dS$, de moment $dM = r dT = r f P_A dS$. En coordonnées polaires l'élément de surface est $dS = r dr d\theta$, d'où $dM = -f P_A r^2 dr d\theta$. L'intégration sur la surface d'un patin donne donc

$$M'_{\vec{T}, Oz} = -f \theta_p P_A \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} = -\frac{2}{9} f m g \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{(r_2^2 - r_1^2)}.$$

- III.D15. On calcule $\frac{M'_{\vec{T}, Oz} - M_{\vec{T}, Oz}}{M'_{\vec{T}, Oz}} = 1 - \frac{M_{\vec{T}, Oz}}{M'_{\vec{T}, Oz}} = 1 - \frac{\frac{r_m f m g}{3}}{\frac{2}{9} f m g \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{(r_2^2 - r_1^2)}} = 2.0 \times 10^{-3}$. On voit

donc que l'on a commis une très légère erreur en prenant un modèle ponctuel plutôt qu'un modèle réparti.