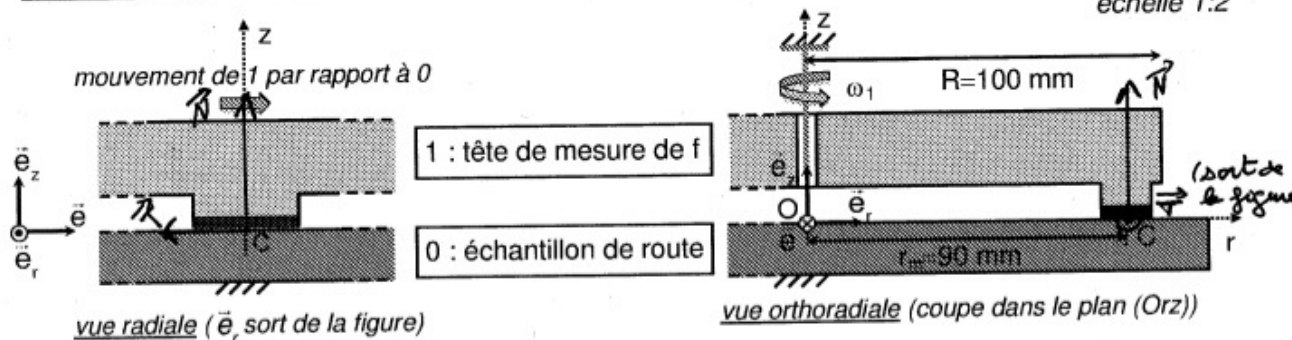


Corrigé du devoir surveillé n° 3

Problème I. Machine de Wehner et Schulze. E3A 2014 MP

D Mesure du coefficient de frottement

D1. Voir figure ci-dessous :

Document-réponse « Mécanique », à compléter et rendre avec la copie**Figure D : Tête de mesure du coefficient de frottement** (un seul patin est représenté) échelle 1:2

D2. Dans une situation de glissement, la vitesse de glissement est non nulle et $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.
 \vec{T} est anticollinéaire à la vitesse de glissement.

Dans une situation de non glissement, la vitesse de glissement est nulle et $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|$.
 Ici tant qu'il y a glissement, la vitesse de glissement est selon $+\vec{e}_\theta$, et donc :

$$\vec{T} = -fN\vec{e}_\theta.$$

D3. La tête n'a pas de mouvement selon la verticale. Les composantes normales compensent donc le poids (en supposant qu'il n'y ait aucune autre force de soutien). Par symétrie on a donc $3N = mg$, soit

$$N = \frac{mg}{3}.$$

Il vient donc

$$T = \frac{fmg}{3}.$$

D4. On a facilement

$$M_{\vec{T}, Oz} = -r_m T = -\frac{r_m fmg}{3}.$$

D5. On a immédiatement $\omega_{1,i} = \frac{v_{C,1/O,i}}{r_m} = 3.1 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}$

D6. L'application du théorème du moment cinétique scalaire à la tête de mesure en projection sur Oz donne directement (en prenant en compte les trois patins!) :

$$\frac{1}{2}mR^2 \frac{d\omega_1}{dt} = 3M_{\vec{T}, Oz} = -r_m fmg.$$

D7. L'intégration est immédiate et donne

$$\omega_1(t) = \omega_{1,i} - \frac{2r_m f g}{R^2} t.$$

L'allure est celle d'un segment de droite de pente négative suivi à partir de l'instant $t = \tau$ calculé dans la question suivante, d'une demi droite horizontale, de valeur nulle (la tête de mesure est immobile!).

Elle est donnée plus loin avec une autre question.

D8. Il suffit de résoudre $\omega_1(\tau) = 0$, ce qui donne immédiatement

$$\tau = \frac{\omega_{1,i} R^2}{2r_m f g}.$$

Cette valeur ne dépend pas de m , c'est évident. Elle ne dépend pas non plus du nombre de patins (il suffit d'essayer avec n patins pour voir que les n se simplifient (ce qui est évident physiquement...))

D9. L'application numérique donne

$$f = 0.42.$$

C'est une valeur assez élevée, mais tout à fait raisonnable pour du caoutchouc sur un revêtement routier.

D10. Si le disque est immobile c'est que la somme des moments qui s'exercent sur lui selon Oz est nul. Il y a le moment M_0 et l'opposé du moment calculé plus haut, multiplié par 3 car il y a trois patins. Au total on a $0 = M_0 - 3M_{\vec{T}, Oz}$. La mesure de M_0 permet d'écrire

$$M_0 = -3 \frac{r_m f m g}{3}, \text{ d'où}$$

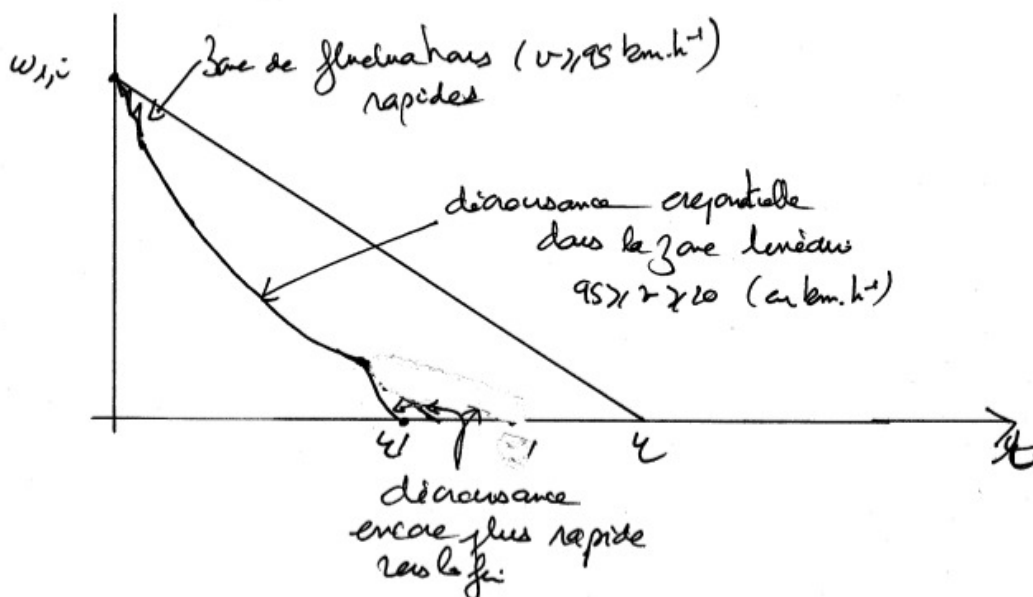
$$f = -\frac{M_0}{r_m m g}.$$

D11. On constate qu'au début, lorsque la vitesse est encore élevée (vitesse supérieure à 95 km h^{-1}), f présente des oscillations! Ceci est sans doute dû à une phase de rebond de la tête sur l'échantillon. Les mesures de f dans cette partie de la courbe ne sont sans doute pas pertinentes.

Ensuite la vitesse décroît jusqu'à environ 20 km h^{-1} , et on constate que le coefficient de frottement augmente légèrement, de manière presque linéaire (et donc f diminue lorsque la vitesse de glissement augmente). Ceci n'est pas du tout prévu par les lois de Coulomb, qui sont trop simplistes en l'espèce!

Quand la vitesse devient faible, on note une forte augmentation de f pour atteindre une valeur proche de la valeur statique, qu'on peut estimer aux alentours de 0.9, ce qui est relativement élevé! Là aussi ce comportement n'est pas prévu par les lois de Coulomb.

D12. L'allure est donnée sur la figure suivante avec quelques justifications. En particulier le temps d'arrêt est plus court que dans l'hypothèse $f = Cte = 0,4$.



D13. On a $\theta_p = \frac{2b}{r_1 + r_2} = 0.33 \text{ rad}$, ou encore 19° .

La surface du patin est $S = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \theta_p = 4.2 \times 10^2 \text{ mm}^2$, d'où une pression

$$P_A = \frac{N}{S} = \frac{mg}{3S} = 2.0 \text{ bar}.$$

D14. Un élément de surface dS du patin, à la distance r de l'axe, est soumis à une composante normale élémentaire $dN = P_A dS$, et donc à une composante tangentielle $dT = f dN = f P_A dS$, de moment $dM = r dT = r f P_A dS$. En coordonnées polaires l'élément de surface est $dS = r dr d\theta$, d'où $dM = -f P_A r^2 dr d\theta$. L'intégration sur la surface d'un patin donne donc

$$M'_{\vec{T}, Oz} = -f \theta_p P_A \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} = -\frac{2}{9} f m g \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{(r_2^2 - r_1^2)}.$$

D15. On calcule $\frac{M'_{\vec{T}, Oz} - M_{\vec{T}, Oz}}{M'_{\vec{T}, Oz}} = 1 - \frac{M_{\vec{T}, Oz}}{M'_{\vec{T}, Oz}} = 1 - \frac{r_m f m g}{\frac{2}{9} f m g \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{(r_2^2 - r_1^2)}} = 2.0 \times 10^{-3}$. On voit

donc que l'on a commis une très légère erreur en prenant un modèle ponctuel plutôt qu'un modèle réparti.

Partie I : contrôle de la tonalité du son émis par le thérémine

D1.

- Ces deux fréquences ne sont pas audibles car largement au dessus de 20 kHz qui est la limite supérieure du domaine audible.
- En linéarisant le produit $\sin 2\pi f_1 t \times \sin 2\pi f_2 t$ on trouve dans le spectre deux fréquences respectivement égales à $f_1 + f_2 = 160.44 \text{ kHz}$, complètement inaudible et $f_2 - f_1 = 440 \text{ Hz}$, qui elle est audible (c'est le "la3" du diapason).

D2. Le rôle de ce filtre est d'éliminer la composante très haute fréquence pour ne garder que la composante audible. Il faut donc utiliser une filtre passe-bas dont la fréquence de coupure soit nettement au-dessus de 20 kHz.

Remarque : d'un point de vue purement acoustique il n'y a aucune nécessité d'éliminer cette composante haute fréquence.

D3.

- (a) La loi des mailles permet d'écrire directement $U_{C_0} + U_{L_0} = 0$ (la tension aux bornes de la bobine est comptée positivement du haut vers le bas). Mais en appelant i l'intensité qui circule dans le circuit dans le sens horaire on a les deux relations supplémentaires suivantes : $i = C_0 \frac{dU_{C_0}}{dt}$ et $U_{L_0} = L_0 \frac{di}{dt}$, ce qui permet d'écrire $U_{L_0} = L_0 C_0 \frac{d^2 U_{C_0}}{dt^2}$ et donc d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par U_{C_0} mise sous forme canonique :

$$\frac{d^2 U_{C_0}}{dt^2} + \frac{1}{L_0 C_0} U_{C_0} = 0.$$

- (b) La solution de l'équation différentielle précédente est $U_{C_0} = A \cos \omega_0 t + \varphi$, en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ (pulsation propre de l'oscillateur harmonique).

- (c) D'où $f_2 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_0 C_0}}$.

D4. Dans le schéma-bloc A ce que l'on vient d'étudier correspond à la partie en bas à droite : oscillateur de référence, oscillateur, mélangeur et filtre. C'est en sortie du filtre qu'on trouve le signal audible.

D5.

- (a) On ne refait pas les calculs. On sait que l'on peut remplacer les condensateurs en parallèle par un condensateur unique de capacité $C_0 + C_{h1}$. On en déduit facilement par analogie $f_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_0 (C_0 + C_{h1})}}$.

- (b) On a donc dans le spectre les fréquences $f_1 + f_2 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_0 C_0}} + \frac{1}{2\pi \sqrt{L_0 (C_0 + C_{h1})}}$ et $f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_0 C_0}} - \frac{1}{2\pi \sqrt{L_0 (C_0 + C_{h1})}}$.

Il faut choisir une fréquence de coupure f_c telle que $f_2 - f_1 \ll f_c \ll f_2 + f_1$.

D6. (a) Par un diviseur de tensions (légitime car la résistance et le condensateur sont en série), il vient directement $\underline{H}(jf) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}}$ avec $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$.

- (b) D'après les valeurs numériques précédentes on peut choisir $f_c = 20 \text{ kHz}$, d'où $R = \frac{1}{2\pi f_c C} = 8 \times 10^2 \Omega$ (1 seul CS...)

D7. Par lecture directe dans le tableau il faut prendre $x = 20 \text{ cm}$.

On constate par ailleurs qu'en rajoutant 12 cm à x dans le domaine entre 8 et 44 cm, la fréquence est divisée par deux. En gardant x en cm et f en Hz l'énoncé propose d'écrire $x = a \log f + b$. On a donc $x + 12 = a \log(f/2) + b = a \log f - a \log 2 + b$. Par différence on en tire $a = \frac{12}{-\log 2} \simeq -40 \text{ cm}$.

Remarque : la question est bizarrement posée puisqu'on nous donne la réponse lors de l'indication de la relation affine...

D8. Pour obtenir un son plus grave il faut diminuer la fréquence, ce qui d'après le tableau précédent se fait en éloignant la main de l'antenne.

En supposant que la main puisse se placer à des distances comprises entre 1 et 74 cm (données du tableau) le thérémine couvre un peu plus de 5 octaves.

Dans le domaine intermédiaire on a vu qu'il fallait globalement déplacer la main de 12 cm pour diviser la fréquence par deux et donc déplacer la note d'une octave. Quand on très proche de l'antenne il faut se déplacer un peu moins et quand on est loin il faut se déplacer au contraire plus... Ce qui ne facilite sûrement pas le jeu... Mais c'est la même chose sur beaucoup d'instruments de musique...

Partie II : contrôle du volume ou intensité du son émis

E Filtrage passe-bande

II-E-E1.- On voit sur le schéma de la figure 5 qu'on filtre par un filtre passe-bande le signal issu d'un oscillateur L_1C_1 : on récupère un signal sans doute quasi-sinusoïdal de pulsation ω_2 et dont l'amplitude dépend de l'écart entre la pulsation propre du circuit L_1C_1 et ω_2 . Un détecteur d'amplitude utilisant une diode va permettre de fabriquer une tension continue dont la valeur est égale à l'amplitude du signal filtré précédent. Cette tension continue commande le gain par lequel le signal audible est multiplié (VCA = Voltage Commanded Amplifier).

Par analogie avec la partie précédente $f' = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1(C_1 + C_{h2})}}$.

II-E-E2.-

- On vérifie facilement que seuls les montages 1 et 4 peuvent se comporter comme des filtres passe-bande. Le montage 2 est un passe-bas et 3 un passe-haut.
- Le montage avec ALI est plus intéressant car sa fonction de transfert ne sera pas modifiée par la présence d'autres montages en aval. Le montage M est donc le montage 1.

II-E-E3.- Il est clair que seule la figure 9-c est la courbe de réponse en gain d'un passe-bande.

II-E-E4.-

- H_0 porte le nom de gain dans la bande passante (c'est le gain lorsqu'on travaille à $f = f_0$). f_0 est la fréquence centrale du passe-bande (c'est la fréquence qui passe le mieux). Q est le facteur de qualité du circuit et peut être utilisé pour caractériser la sélectivité du filtre.

- Les pulsations de coupures sont les pulsations ω telles que $|H| = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$. Ici il est clair que $G_{\max} = |H_0|$.

Cf. le cours pour démontrer $\Delta f' = \frac{f_0}{Q}$.

II-E-E5.- Notons i l'intensité circulant dans la branche contenant R et C en série et dirigée vers l'entrée inverseuse. Notons Z_{eq} l'impédance équivalente à l'association parallèle RC et i' l'intensité circulant dans cette impédance et dirigée aussi vers l'entrée inverseuse.

La loi des noeuds permet d'écrire $i + i' = 0$, soit $\frac{v_e}{R + \frac{1}{jC\omega}} + \frac{v_s}{Z_{eq}} = 0$ ou encore

$$\frac{v_e}{R + \frac{1}{jC\omega}} + \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)v_s = 0. \text{ Quelques lignes de calculs permettent d'arriver à } \underline{H} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right)} \text{ en posant } f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Par identification on a donc $Q = \frac{1}{2}$ et $H_0 = \frac{1}{2}$.

II-E-E6.- Il faut sans doute comprendre qu'on se débrouille pour que les bornes de la bande passante correspondent aux deux positions extrêmes de la main évoquées dans l'énoncé. Notons $f_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_m}}$ et $f_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_M}}$ ces deux fréquences. Les hypothèses de l'énoncé se traduisent par $\Delta f' = f_+ - f_-$ et surtout $2f_0 = f_+ + f_-$. On en déduit alors après quelques lignes de calcul que $Q = \frac{f_0}{\Delta f'} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{C_M} + \sqrt{C_m}}{\sqrt{C_M} - \sqrt{C_m}} = 9.5$.

F Détection de l'amplitude

II-F-F1.-

- (a) Juste après le branchement la tension aux bornes de la diode est nulle. Elle est donc a priori dans l'état passant.
- (b) Tant que la diode est passante il est clair que $S(t) = e(t)$. La loi des noeuds permet d'écrire que l'intensité qui traverse la diode est la somme des intensités traversant le résistor et le condensateur, soit $I(t) = \frac{e(t)}{R} + C \frac{de(t)}{dt} = \frac{E_{\max}}{R} \sin 2\pi f' t + 2\pi f' C E_{\max} \cos 2\pi f' t$. On peut remarquer qu'au moins pour les instants proches de $t = 0$ ce courant est bien positif.
- (c) Le dipôle change d'état pour la première fois quand l'intensité qui le traverse s'annule pour la première fois. Pour trouver l'instant θ_1 correspondant il est utile de réécrire l'expression de $I(t)$ sous la forme d'un unique sinus par exemple en posant φ un angle tel que $\sin \varphi = -\frac{2\pi f' RC}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f'^2 R^2 C^2}}$ et $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f'^2 R^2 C^2}}$ (soit $\varphi = -\arctan 2\pi f' RC$ et donc $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$) il vient $I(t) = \sqrt{1 + 4\pi^2 f'^2 R^2 C^2} \frac{E_{\max}}{R} \sin(2\pi f' t - \varphi)$. Cette intensité s'annule pour la première fois à l'instant θ_1 quand $2\pi f' \theta_1 - \varphi = \pi$, soit $\theta_1 = \frac{T'}{2} + \frac{\varphi}{2\pi f'}$ en notant $T' = 1/f'$ la période du signal.

Cet instant sera proche de $T'/4$ si $\frac{\varphi}{2\pi f'} \simeq -\frac{T'}{4}$, soit $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$, soit dès que $2\pi f' RC \gg 1$ ou encore $RC \gg \frac{1}{\omega'}$ en notant ω' la pulsation associée au signal d'entrée.

II-F-F2.- Quand la diode se bloque le circuit est un circuit RC série dans lequel le condensateur se décharge dans la résistance. On établit facilement que s vérifie l'équation différentielle $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{RC} = 0$. Donc la solution compte des conditions initiales est $s(t) = E_{\max} \exp -\frac{t - \theta_1}{\tau}$ en notant $\tau = RC$ la constante de temps du circuit.

II-F-F3.- L'allure demandée est donnée ci-après (figure 1). La diode redeviendra passante quand la tension $e(t)$ repassera au-dessus de l'exponentielle décroissante. Ceci prendra au pire une période de toute façon. Mais on peut remarquer que sur une période T' la décroissance de l'exponentielle est très faible en raison de l'hypothèse $RC \gg \frac{1}{\omega'}$ qui se traduit aussi par $\tau \gg T'!$

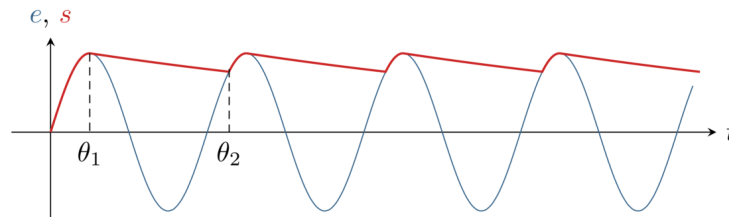


FIGURE 1 – Chronogramme des tensions e et s . Comme $2\pi RC f' \gg 1$ les exponentielles décroissantes sont quasiment confondues avec des droites horizontales

II-F-F4.- On peut donc dire qu'après $T'/4$ le signal de sortie est quasiment constant et égal à l'amplitude du signal d'entrée E_{\max} .

II-F-F5.-

(a) On a facilement $E_{\max} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f'}{f_0} - \frac{f_0}{f'}\right)^2}} V_{\max}$.

(b) En posant $f' = f_0 (1 + \varepsilon)$, un développement limité à l'ordre 1 donne facilement $E_{\max} = H_0 (1 - 2Q^2 \varepsilon^2)$.

(c) Et donc de manière évidente $S(f') = H_0 \left(1 - 2Q^2 \left(\frac{f'}{f_0} - 1 \right)^2 \right)$

II-F-F6.- Un montage suiveur derrière le circuit étudié permettrait que l'étude précédente ne soit pas modifiée si on place un autre circuit en aval. Mais a priori S va servir de tension de contrôle au VCA qui a des chances de présenter une impédance d'entrée infinie...