

Séance de soutien numero 6 : inégalités, valeur absolue et racine carré

Vésale Nicolas - Dimitri De Vallière

1 Opérations autorisées, opérations interdites

On énonce les règles pour le symbole \leq . Elles sont également valables pour $<$. En changeant l'ordre, elles sont bien sûr valables pour \geq et $>$.

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Considérons une inégalité de la forme

$$(I) : A \leq B$$

On peut, de manière équivalente :

- ▶ Ajouter (ou soustraire) la même chose de part et d'autre :

$$(I) \iff A + C \leq A + C$$

- ▶ Multiplier (ou diviser) par un nombre **strictement** positif :

$$(I) \iff AC \leq AC$$

- ▶ Multiplier (ou diviser) par un nombre **strictement** négatif :

$$(I) \iff AC \geq AC$$

COMPOSITION :

Considérons une inégalité de la forme

$$(I) : A \leq B$$

et f une fonction définie en A et en B .

- ▶ Si la fonction est **strictement croissante** :

$$A \leq B \iff f(A) \leq f(B)$$

- ▶ Si la fonction est **strictement décroissante** :

$$A \leq B \iff f(A) \geq f(B)$$

Si l'on n'a pas le "strict", il y a seulement implication.

A PARTIR DE PLUSIEURS INÉGALITÉS

Si on a deux inégalités :

$$A \leq B \text{ et } C \leq D$$

On peut

- ▶ les ajouter **mais PAS** les soustraire pour en déduire une troisième

$$\text{si } A \leq B \text{ et } C \leq D \text{ alors } A + C \leq B + D$$

- ▶ **si les deux membres sont positifs**, les multiplier, **mais PAS** les diviser :

$$\text{si } A \leq B \text{ et } C \leq D \text{ alors } AC \leq BD$$

COMPOSITIONS PARTICULIÈRES :

- ▶ **Inversion** : Si A et B sont de même signe et non nuls :

$$A \leq B \iff \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$$

- ▶ **Elevation au carré** : Si A et B sont positifs ou nuls :

$$A \leq B \iff A^2 \leq B^2$$

LES INTERDITS

Règle d'or : se dire que tout ce qui n'est pas indiqué ci dessus pose peut-être problème.

En particulier, diviser des inégalités entre elles, élever au carré ou passer à l'inverse sans considération des signes sont des erreurs fréquentes qu'il faut éviter.

Au besoin, **faire des "disjonctions de cas"!**

2 Exercices :

Exercice 1 : inéquations simples

1. $(x - 5)(x - 6) \geq 0$.

2. $x^2 + 3x - 4 < 0$.

3. $x^2 + x \geq 3$.

4. $(x - 1)^2 \leq 0$.

5. $x + \frac{1}{x} \geq 0$.

6. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} < 0$.

7. $\frac{x^2 + 1}{x - 1} \geq 5$.

8. $\frac{1 - 4x}{x^2 + x + 1} \leq 0$.

◆ **Exercice 2 : équations et inéquations avec des valeurs absolues**

1. $2|x - 4| + 1 = 3x + 2.$

2. $|x + 3| = 2x - 1.$

3. $|x^2 - 1| = |x + 1|$

4. $|2x + 3| \leq 3$

5. $|5 - x| \leq 3x + 1$

6. $|x + 3| - 2|x - 1| > 2$

◆ **Exercice 3 : équations et inéquations avec des racines carrés**

1. $\sqrt{3x - 5} = x - 3.$

2. $\sqrt{2x - 1} = 1 - 2x$

3. $\sqrt{x^2 - 8} - 2x = 5$

4. $\sqrt{x + 1} \geq \sqrt{4x - 1}.$

5. $x + \sqrt{x + 1} < 5.$

6. $x - 1 \leq \sqrt{x + 3}$

◆ **Exercice 4 : inéquation avec des logarithmes et des exponentielles**

1. $\ln(x^2) > 0.$

2. $2\ln(x) > 0.$

3. $e^{-2x} - e^{-x} > 0.$

4. $\ln(2x + 1) < \ln(4 - 2x).$