DEVOIR SURVEILLÉ 2 18/10/23 Durée 4h

Exercice 1 : Diagonalisation à l'aide d'un polynôme annulateur

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E.
On suppose que le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de u.

1. On pose $v = u - \mathrm{id}_E$ et $w = u - 2\mathrm{id}_E$.

1.a. Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

1.b. Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

1.c. Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

1.d. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

1.e. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Ker}(w)$ sont stables par u.

2. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

3. On note r la dimension de $\mathrm{Ker}(w)$.
Déterminer la trace de u et le déterminant de u en fonction de r.

4. Application
Dans cette question, E est de dimension 3. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.a. Vérifier que le polynôme P défini ci-dessus est un polynôme annulateur de u.
On fera apparaître les calculs sur la copie.

4.b. Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question 1.

4.c. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(V)$ et une base de $\mathrm{Ker}(W)$.
En déduire une base de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base de $\mathrm{Ker}(w)$.

4.d. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible Q telles que $U = QDQ^{-1}$.

Exercice 2 : Déterminant de Vandermonde

Pour n entier, $n \geqslant 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par :

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deux à deux distincts.

Dans la suite, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

2. Calculer $V(x_1, x_2)$.

3. On considère la fonction $P : t \mapsto V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)$.

3.a. Démontrer que P est une fonction polynômiale de degré au plus $n-1$.

3.b. Justifier que le cœfficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.

3.c. Déterminer $n-1$ racines distinctes de P et en déduire une factorisation du polynôme P.

4. Démontrer par récurrence que $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

5. Application

Soit n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls.

5.a. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$.

5.b. Démontrer que l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \sum_{k=1}^{n} x_k^3, \ldots, \sum_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.

Exercice 3 : Polynômes interpolateurs de Lagrange

On note $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On pose $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ et $a_2 = -2$ et on note $\mathscr{B} = (L_0, L_1, L_2)$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux réels a_0, a_1 et a_2.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Rappeler (sans preuve) l'expression des coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

2. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$. On la note A.

3. Donner l'expression de L_0, L_1 et L_2.

4. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Problème : Pseudo-inverse et matrice stochastique

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie I : Préliminaires

A. Matrices stochastiques

On note J le vecteur-colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients valent 1.

Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* lorsque tous ses cœfficients sont positifs et qu'elle vérifie $MJ = J$.

I.A.1. Soit M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si M et N sont stochastiques alors MN est stochastique.

I.A.2. Soit M une matrice stochastique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, M^k est stochastique.

I.A.3. Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice M.
Montrer que la matrice M est stochastique.

B. Une norme sous-multiplicative

Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|M\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|.$$

I.B.1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

I.B.2. Montrer que pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|MN\| \leqslant \|M\|\|N\|$.

I.B.3. Montrer que si M est une matrice stochastique alors $\|M\| = 1$.

Partie II : Pseudo-inverse d'une matrice

Définition
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

$$AA' = A'A \tag{1}$$
$$A = AA'A \tag{2}$$
$$A' = A'AA' \tag{3}$$

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A c'est-à-dire défini par : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi(X) = AX$.

II.1. Montrer que l'existence d'un pseudo-inverse de A implique que

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi^2)$$

et en déduire que $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\varphi^2)$.

Inversement, on suppose maintenant que $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\varphi^2)$. On note r cet entier.

II.2. Montrer que l'image et le noyau de φ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi).$$

II.3. Montrer qu'il existe $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$, B inversible et $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, P inversible, telles que

$$A = P\begin{pmatrix} B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

II.4. Montrer que $P\begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}P^{-1}$ est un pseudo-inverse de A.

On souhaite désormais prouver l'unicité du pseudo-inverse de A.

Considérons un pseudo-inverse quelconque A' de A et φ' l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A'.

II.5. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont stables par φ' et qu'il existe $C \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ telle que

$$A' = P\begin{pmatrix} C & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

II.6. Montrer que $\varphi \circ \varphi'$ est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de φ et préciser ce que vaut $P^{-1}(AA')P$.

II.7. En déduire l'unicité du pseudo-inverse de A.

Partie III : Limite d'une suite matricielle

Dans toute cette partie, M désigne une matrice stochastique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients sont strictement positifs.

On pose $A = I_n - M$ et on note φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

On admet que $\operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg}(\varphi^2)$. La partie II garantit ainsi l'existence et l'unicité du pseudo-inverse de A, qui est donné par :

$$A' = P \begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

où $B \in GL_r(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ sont les matrices définies à la question II.3.

III.1. Soit D une matrice inversible de $\mathscr{M}_r(\mathbb{R})$. Établir pour tout entier k supérieur ou égal à 1 l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{k-1}\left((I_r - D)^j - (I_r - D)^{j+1}\right) = I_r - (I_r - D)^k$$

puis en déduire que :

$$\sum_{j=0}^{k-1}(I_r - D)^j = (I_r - (I_r - D)^k)D^{-1}.$$

III.2. Établir pour tout entier k supérieur ou égal à 1 l'identité suivante :

$$\sum_{j=0}^{k-1} M^j = (I_n - M^k)A' + k(I_n - AA').$$

III.3. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a $\|(I_n - M^k)A'\| \leqslant 2\|A'\|$, où $\|.\|$ est la norme définie dans la partie I.B.

En déduire que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} M^j$ existe et donner sa valeur.

III.4. Montrer que $I_n - AA'$ est stochastique.