DM4 (suites et séries de fonctions)
Pour le 6 novembre

Dans toute la suite, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans ce sujet exclusivement, on dira que *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge absolument sur* I lorsque pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.

Le but de ce problème est de comparer les différents modes de convergence d'une série de fonctions : convergence simple, convergence uniforme, convergence normale et convergence absolue.

1. Pour chaque couple d'assertions ci-dessous, préciser l'implication logique donnée par le cours en indiquant $\Leftarrow$ ou $\Rightarrow$ entre les deux :

(a) $[\sum f_n$ converge uniformément sur $I]$ ... $[\sum f_n$ converge normalement sur $I]$

(b) $[\sum f_n$ converge uniformément sur $I]$ ... $[\sum f_n$ converge simplement sur $I]$

(c) $[\sum f_n$ converge absolument sur $I]$ ... $[\sum f_n$ converge normalement sur $I]$

(d) $[\sum f_n$ converge absolument sur $I]$ ... $[\sum f_n$ converge simplement sur $I]$

2. Étudier chacun des quatre modes de convergence pour la série de fonctions $\sum f_n$ sur I dans les deux cas suivants :

(a) $I = \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{2^n} + \dfrac{\sin(nx)}{3^n}$.

(b) $I = \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n+1}$.

3. Dans cette question, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

(b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ ne converge absolument en aucune valeur x de $[0,1]$.

(c) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

4. Dans cette question, on pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, $f_n(x) = x^n$.

(a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-1,1[$.

(b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

(c) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur $]-1,1[$.

Dans les questions **5.** à **8.**, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite décroissante de réels positifs, $I = [0,1[$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$:

$$f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x).$$

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I.

6. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

(b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$, calculer $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k$.

(b) Montrer que si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 alors la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I.
On pourra observer que pour tout $k \geqslant n+1$, on a $\alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

(c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

8. Dans chacun des cas suivants, donner en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

(a) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I.

(b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

(c) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. Montrer à l'aide de contre-exemples que les implications réciproques des implications établies à la question **1.** sont fausses.

10. Existe-t-il des implications logiques entre les assertions $[\sum f_n$ converge uniformément sur $I]$ et $[\sum f_n$ converge absolument sur $I]$? Prouver vos affirmations.