1-2 Produit par un scalaire

dém : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\lambda \neq 0$

Notons $\forall n \geq n_0$ $v_n = \lambda u_n$

Posons également $\forall n \geq n_0$ $\begin{cases} S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \\ S'_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k \end{cases}$

On a $\forall n \geq n_0$, $S'_n = \sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k)$

$$S'_n = \lambda S_n$$

* Si $\sum u_n$ converge, alors la suite (S_n) converge vers une limite finie l, d'où (S'_n) converge vers une limite finie qui est λl. Donc $\sum v_n = \sum (\lambda u_n)$ converge et comme $\lim_{n \to +\infty} S'_n = \lambda \lim_{n \to +\infty} S_n$

on a $\sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$

* Si $\sum v_n$ converge, alors la suite (S'_n) converge vers une limite finie l, d'où, puisque $S_n = \frac{1}{\lambda} S'_n$ (utilité de $\lambda \neq 0$ ici),

$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\lambda} l$, donc $\sum u_n$ converge et

$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$ càd $\lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$

ou encore $\lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k)$

<u>Concl</u> $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge et en cas de convergence $\sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

<u>Rque</u> Par équivalence logique

($\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum (\lambda u_n)$ converge)

équivaut à ($\sum u_n$ diverge $\Leftrightarrow \sum (\lambda u_n)$ diverge)

C'est pour cela qu'on dit que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

1.3 Somme de séries

__dém__ Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles.

Posons, $\forall N\geq n_0$, $S_N=\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ et $S'_N=\sum_{n=n_0}^{N} v_n$

Ainsi que $Z_N=\sum_{n=n_0}^{N}(u_n+v_n)$

On a $\forall N\geq n_0$ $Z_N=\sum_{n=n_0}^{N} u_n+\sum_{n=n_0}^{N} v_n = S_N+S'_N$

* __1er cas__ $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent,

alors les suites (S_N) et (S'_N) convergent donc la suite (Z_N) converge, càd la série $\sum(u_n+v_n)$ converge

De plus, comme $Z_N=S_N+S'_N$,

il vient $\lim_{N\to+\infty} Z_N=\lim_{N\to+\infty} S_N+\lim_{N\to+\infty} S'_N$

càd $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n+\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$

* __2e cas__ $\sum u_n$ converge et $\sum_n$ diverge,

alors la suite (S_N) converge et la suite (S'_N) diverge. La suite (Z_N) est donc divergente (en effet, si elle convergeait $(S'_N)=(Z_N-S_N)$ convergerait, ce qui est contraire à notre hypothèse),

donc $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

__Rque__ Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent tous les deux, parfois $\sum(u_n+v_n)$ converge et parfois $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

On ne peut rien prévoir !

__Ex1__ Si $u_n=(-1)^n$; $v_n=(-1)^{n+1}$ $\forall n\geq 0$

alors $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge. Cependant $\forall n\geq 0$ $u_n+v_n=0$, donc $\sum(u_n+v_n)$ converge (la suite des sommes partielles est constante)

__Ex2__ Si $u_n=(-1)^n$; $v_n=(-1)^n$ $\forall n\geq 0$

Alors $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge et $\sum(u_n+v_n)$ $=\sum(2\cdot(-1)^n)$ diverge aussi