Attention, la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ est nécessaire mais non suffisante pour que $\sum u_n$ converge. Nous verrons que le terme général de la série harmonique tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ mais que cette série diverge.

1.2 Produit par un scalaire

Théorème : Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle et λ un réel **non nul.**
La série de terme général u_n et la série de terme général λu_n sont de même nature.
En cas de convergence :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

1.3 Somme de séries

Théorème : Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles.

— Si la série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont convergentes , alors la série de terme général $u_n + v_n$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

— Si la série de terme général u_n est convergente et la série de terme général v_n est divergente, alors la série de terme général $u_n + v_n$ est divergente

Attention, lorsque la série de terme général u_n et la série de terme général v_n divergent toutes les deux, on ne peut rien dire sur la nature de la série de terme général $u_n + v_n$.
Il est possible qu'elle converge.
On ne peut donc pas séparer $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n)$ en $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ si l'on n'a pas établi **auparavant** que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes les deux.

Remarque : Si la série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont convergentes, alors, pour tous réels λ et μ, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ est convergente et on a :
$\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} v_n$

2 Séries classiques

2.1 Série harmonique $\sum \frac{1}{n}$

Théorème : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente .

2.2 Série $\sum \frac{1}{n^2}$

Théorème : La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente .

2.3 Série exponentielle

Théorème : Pour tout réel x, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.