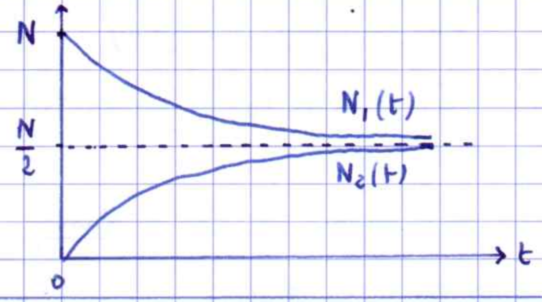
1 Considérations préliminaires

1. ℓ = distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions.

2. Une particule franchit le trou sans collision si la dimension caractéristique du trou est très petite devant le libre parcours moyen $\Rightarrow$ $\sqrt{s} \ll \ell$

3. A la fin, il y aura $\frac{N}{2}$ particules dans chaque enceinte



4. A priori, τ peut dépendre de : s, N, V, m, T_0
Une équation aux dimensions basée sur les unités mètre, kilogramme, seconde, degré kelvin fournira quatre équations alors qu'il y a cinq paramètres.
On ne peut pas accéder à la dépendance de τ avec ces grandeurs.

5. Si on filme l'évolution du système et qu'on passe le film à l'envers, on voit un phénomène absurde : les atomes quittent l'enceinte 2 pour venir tous dans l'enceinte 1.
C'est irréversible.

2 Distribution des vitesses des atomes du gaz

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} dP_x(v_x) = 1$ car v_x est compris entre $-\infty$ et $+\infty$ avec certitude (condition de normalisation de la probabilité)

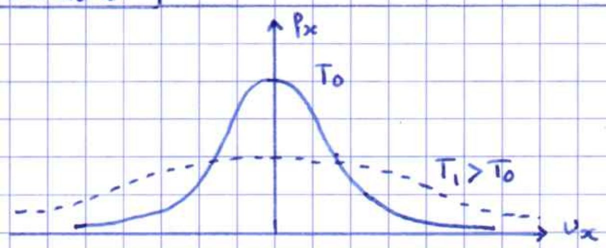
$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-a v_x^2} dv_x = 1$ on pose $x = \sqrt{a}\, v_x \rightarrow dv_x = \frac{dx}{\sqrt{a}}$

$A . \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-x^2} dx = 1$

$\frac{2A}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1$ avec $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

donc : $2A \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m}} . \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T_0}}}$

7. $p_x = A e^{-a v_x^2}$
$= A e^{-\frac{m v_x^2}{2 k_B T}}$

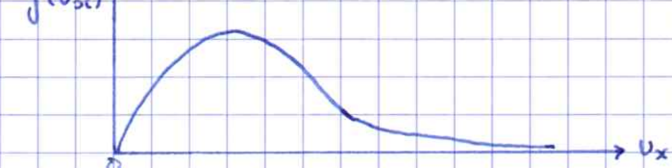


C'est une courbe de Gauss dont la largeur à mi-hauteur varie en $\sqrt{T}$

Plus la température est élevée, plus la probabilité d'observer des vitesses importantes est grande.

8. $\langle v_x^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} v_x^2\, dP_x(v_x) = \int_{\mathbb{R}} v_x^2 . p_x\, dv_x = \int_{\mathbb{R}} v_x^2 . A e^{-a v_x^2} dv_x$

Donc : $\boxed{f(v_x) = A\, v_x^2\, e^{-a v_x^2}}$



9. • $\langle \vec{v}' \rangle = \vec{0}$ car toutes les directions du vecteur $\vec{v}'$ sont équiprobables

• $\langle \vec{v}'^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$ car les trois axes sont équivalents

$\langle v_x^2 \rangle = A \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-a v_x^2} dv_x$ on pose $x = \sqrt{a}\, v_x \Rightarrow dv_x = \frac{dx}{\sqrt{a}}$

$= \frac{A}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-x^2} dx$

$= \frac{2A}{a^{3/2}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

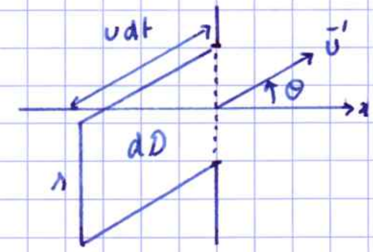
$= 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T_0}} \cdot \left(\frac{2 k_B T_0}{m}\right)^{3/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{k_B T_0}{m}$

donc : $\boxed{E_c = \frac{3}{2} k_B T_0}$ On retrouve la définition cinétique de la température

• $v_{rms} = \sqrt{\frac{3 k_B T_0}{m}}$ A.N. : $v_{rms} = 1{,}0 \cdot 10^3\ m\, s^{-1}$

③ Expression du flux effusif

10. $dD = s \cdot v\, dt \cdot \cos\theta$ or $v \cos\theta = v_x$



soit : $\boxed{dD = s\, v_x\, dt}$

Puis : $\boxed{dN_a = \frac{N_1}{V} s\, v_x\, dt}$ $\left(\frac{N_1}{V}\right.$ = densité particulaire$)$

11. Il faut pondérer chaque dN_a par la probabilité d'observer la vitesse v_x à dv_x près puis intégrer pour tous les $v_x > 0$ (car les atomes vont de gauche à droite)

$\dot{N}_{1/2} = \frac{1}{dt} \int_0^{+\infty} dN_a \cdot dP_x = \frac{N_1}{V} s \int_0^{+\infty} v_x \cdot A e^{-a v_x^2} dv_x$ on pose $x = \sqrt{a}\, v_x \Rightarrow dv_x = \frac{dx}{\sqrt{a}}$

$= \frac{N_1}{V} s \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{a}} A e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{a}}$

$= \frac{N_1}{V} s \frac{A}{a} \cdot I_1 = \frac{N_1}{V} s \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T_0}} \cdot \frac{2 k_B T_0}{m} \cdot \frac{1}{2}$

donc : $\boxed{\dot{N}_{1/2} = N_1 \frac{s}{V} \sqrt{\frac{k_B T_0}{2\pi m}}}$ on a : $\boxed{\tau = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{2\pi m}{k_B T_0}}}$

12. A.N : $\tau = 4 \cdot 10^6\ s$ (avec $V = 1\,L = 10^{-3}\ m^3$) ($\tau \simeq 40$ jours)

13. τ est grand. L'hypothèse de l'évolution quasi-statique est justifiée

14. Equation d'état du gaz parfait : $PV = n_{mol} RT = \frac{N}{N_A} RT = N k_B T \Rightarrow n = \frac{P}{k_B T}$

$\ell > 10\sqrt{s} \Rightarrow \frac{1}{n\sigma} > 10\sqrt{s} \Rightarrow \frac{k_B T_0}{P\sigma} > 10\sqrt{s}$

$\Rightarrow \boxed{P < P_{max} = \frac{k_B T_0}{10\sqrt{s}\,\sigma}}$

$\sigma \sim 10^{-20}\ m^2 \Rightarrow P_{max} \simeq 4 \cdot 10^4\ Pa$

4 Dynamique d'échange d'atomes

15 - Bilan d'atomes pour le compartiment 1 : $\frac{dN_1}{dt} = -\dot{N}_{1/2} + \dot{N}_{2/1}$ (− car perte ; + car gain)

donc : $\boxed{\frac{dN_1}{dt} = \frac{-N_1 + N_2}{\tau}}$

De même pour le compartiment 2 : $\boxed{\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_1 - N_2}{\tau}}$

16 - On a : $\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = \text{constante} = N$

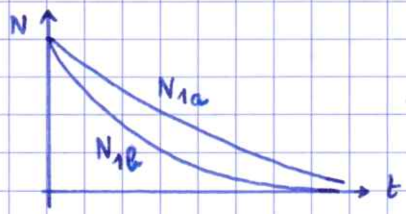
On a : $\frac{dN_1}{dt} - \frac{dN_2}{dt} = -\frac{2}{\tau}(N_1 - N_2) \Rightarrow \frac{d}{dt}(N_1 - N_2) + \frac{2}{\tau}(N_1 - N_2) = 0$

$\Rightarrow N_1 - N_2 = N e^{-\frac{2t}{\tau}}$

d'où : $\boxed{N_1 = \frac{N}{2}\left(1 + e^{-2t/\tau}\right)}$ $\boxed{N_2 = \frac{N}{2}\left(1 - e^{-2t/\tau}\right)}$

17 - τ dépend de la masse m $\Rightarrow$ effusion plus rapide pour le gaz le plus léger

$N_{1a} = \frac{N}{2}\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$ $N_{1b} = \frac{N}{2}\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$



On cherche t^* tel que la différence $N_{1a} - N_{1b}$ soit maximale.

$\frac{d}{dt}(N_{1a} - N_{1b}) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{1}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 0$

$\Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau_1}} = \frac{\tau_1}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

$\Rightarrow -\frac{t}{\tau_1} = \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) - \frac{t}{\tau_2} \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{\ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)}{\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}}}$ (si $\tau_1 > \tau_2$)

Application : enrichissement de l'uranium

18 - Bilan d'atomes pour le compartiment 1 : $\frac{dN_1}{dt} = -\dot{N}_{1/2} + \dot{N}_{2/1} \Rightarrow \frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{\tau_1} + \frac{N_2}{\tau_1}$ (1)

Bilan d'atomes pour le compartiment 2 : $\frac{dN_2}{dt} = \dot{N}_{1/2} - \dot{N}_{2/1} - \dot{N}_{2/\text{vide}} \Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = \frac{N_1}{\tau_1} - \frac{N_2}{\tau_1} - \frac{N_2}{\tau_2}$ (2)

D'après la question 11 : $\tau_2 = \frac{\tau_1}{k}$ car $s' = ks$

D'où : $\boxed{\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{\tau_1} + \frac{N_2}{\tau_1}}$ (1) $\boxed{\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_1}{\tau_1} - \frac{N_2}{\tau_1} - k\frac{N_2}{\tau_1}}$ (2)

19 - (2) donne : $N_1 = \tau_1 \frac{dN_2}{dt} + (k+1) N_2$

On reporte dans (1) : $\tau_1 \frac{d^2 N_2}{dt^2} + (k+1)\frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} - \frac{(k+1)}{\tau_1} N_2 + \frac{N_2}{\tau_1}$

D'où : $\boxed{\frac{d^2 N_2}{dt^2} + \frac{k+2}{\tau_1}\frac{dN_2}{dt} + \frac{k}{\tau_1^2} N_2 = 0}$

20 - On a par identification : $\omega_0^2 = \frac{k}{\tau_1^2}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{k+2}{\tau_1}$ d'où : $Q = \frac{\omega_0 \tau_1}{k+2}$

Soit : $\boxed{Q = \frac{\sqrt{k}}{k+2}}$

Si $k > 1$: $\sqrt{k} < k$ donc $Q < \frac{1}{2} \Rightarrow$ régime apériodique

Si $k < 1$: on a aussi : $Q < \frac{1}{2} \Rightarrow$ régime apériodique

21. Il est absurde de penser que N_1 et N_2 vont osciller de manière pseudo-périodique.
Donc les racines sont forcément réelles.
Elles sont <u>négatives</u> car N_1 et N_2 doivent forcément <u>décroître</u> au cours du temps.

22. $N_2 = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

c.i : $N_2(0) = A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$

$N_1(0) = N \Rightarrow \frac{dN_2}{dt}(0) = \frac{N}{\tau_1}$ d'après (2) $\Rightarrow A_1 p_1 + A_2 p_2 = \frac{N}{\tau_1} \Rightarrow A_1 = \frac{N}{\tau_1(p_1 - p_2)}$

Donc : $\boxed{N_2 = \frac{N}{\tau_1(p_1-p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)}$

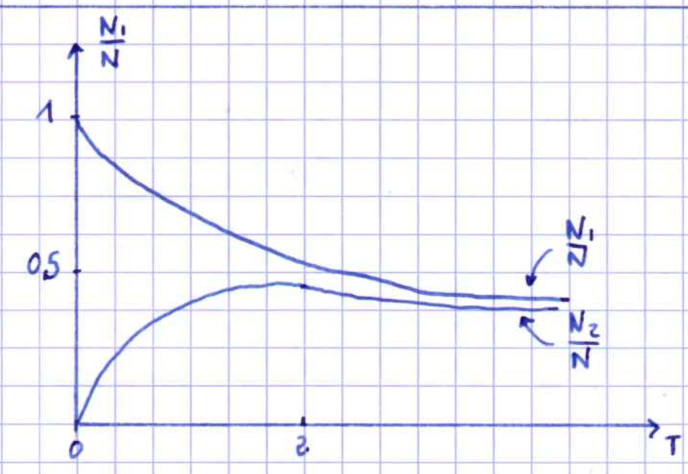
23. k grand $\Rightarrow$ s' grand $\Rightarrow$ N_2 décroît rapidement
k petit $\Rightarrow$ s' petit $\Rightarrow$ N_2 croît beaucoup au début avant de décroître lentement

Donc : $\boxed{(c) : k = 0,1 \quad (b) : k = 1 \quad (a) : k = 10}$

Aux temps courts : $e^{p_1 t} - e^{p_2 t} \simeq (1 + p_1 t - 1 - p_2 t) = (p_1 - p_2)t$

donc : $N_2 = \frac{N}{\tau_1} t$ <u>loi linéaire indépendante de k</u>

24.



Le récipient 2 reçoit beaucoup d'atomes depuis le compartiment 1 et en perd peu vers le vide.

$\Rightarrow$ Au début $N_1 + N_2 \simeq$ cte $= N$

A $T = 2$, on a à peu près la moitié des atomes dans chaque compartiment

Ensuite N_1 et N_2 décroissent lentement

25. On peut suivre l'évolution du nombre de particules en mesurant <u>la pression</u>.

26. Bilan d'atomes pour le compartiment i :

$$\frac{dN_i}{dt} = -\dot{N}_{i/i+1} + \dot{N}_{i+1/i} + \dot{N}_{i-1/i} - \dot{N}_{i/i-1}$$

$$= -\frac{N_i}{\tau} + \frac{N_{i+1}}{\tau} + \frac{N_{i-1}}{\tau} - \frac{N_i}{\tau}$$

Donc : $\boxed{\frac{dN_i}{dt} = \frac{1}{\tau}\left[N_{i+1} + N_{i-1} - 2N_i\right]}$

27. On a : $\frac{dN_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}$

$$N_{i+1} = f(x_i + L, t) = N_i + \frac{\partial f}{\partial x} L + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} L^2$$

$$N_{i-1} = f(x_i - L, t) = N_i - \frac{\partial f}{\partial x} L + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} L^2$$

En reportant dans l'expression de la question 26 : $\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{L^2}{\tau}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$

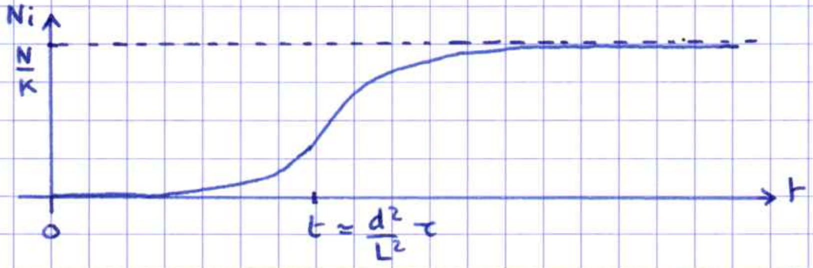
Il s'agit d'une <u>équation de diffusion</u>.

28. Le passage à la limite est valable si N_i varie peu d'une enceinte à l'autre.

29 . Le coefficient de diffusion est $D = \frac{L^2}{\tau}$ (en $m^2 s^{-1}$)

Le temps caractéristique pour atteindre le compartiment d'alcuine d est : $t \simeq \frac{d^2}{D} = \frac{d^2}{L^2}\tau$

Au bout d'un temps très long, les N atomes sont également répartis entre les K enceintes donc : $N_i = \frac{N}{K}$



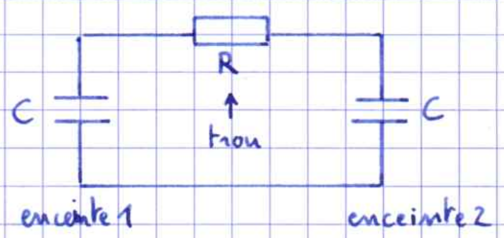
30 . Logiquement : l'analogue du nombre d'atomes N est la charge électrique Q
l'analogue du volume V de l'enceinte est la capacité C
l'analogue de $\dot N_{1\to 2}$ est l'intensité électrique $I = \dot Q$

On a : $V_{elec} = \frac{Q}{C}$ pour un condensateur, donc l'analogue de V_{elec} est la densité particulaire $n = \frac{N}{V}$

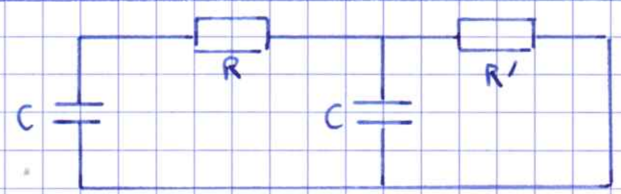
On a (relation (7)) : $\dot N_{1\to 2} = \frac{N_1}{V} s \sqrt{\frac{k_B T_0}{2\pi m}}$

analogue de la loi d'ohm : $I = \frac{V_{elec}}{R}$ donc : $\boxed{R_{eff} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{}{2\pi m}}}$

31 .



32 .



33 . Dans le système électrique, il y a une perte d'énergie dans la résistance R. Ce qui n'apparaît pas pour le système S.