Unité de cellules photovoltaïques

Une utilisation de l'énergie solaire est la production d'énergie électrique par des cellules photovoltaïques. Ce problème étudie le fonctionnement d'un ensemble de cellules pouvant venir en complément d'autres dispositifs. L'énergie pourra être stockée dans des batteries d'accumulateurs et restituée à une installation domestique par l'intermédiaire d'un onduleur.

Les deux parties de ce problème sont totalement indépendantes.

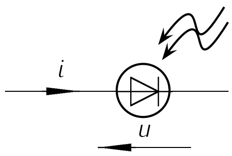
A. Cellules photovoltaïques

Aucune connaissance préalable sur les cellule photovoltaïque, dont le symbole est représenté figure 1 ci-dessous, n'est nécessaire pour résoudre cette partie.

Le comportement d'une cellule photovoltaïque est bien représenté par la fonction caractéristique

$$i = I_s\left[\exp\left(\frac{u}{U_0}\right) - 1\right] - \alpha S E$$

avec $I_s = 0{,}10$ nA ; $U_0 = 25{,}8.10^{-3}$ V ; $S = 12$ cm^2 et $\alpha = 0{,}35$ A.W^{-1} où α est le coefficient représentant les pertes, S la surface de la cellule et E l'éclairement solaire.



1. Ce dipôle est-il symétrique/polarisé ? actif/passif ? linéaire/non-linéaire ? Justifier à l'aide de l'équation constitutive.
2. Lorsque le flux solaire est maximal, l'éclairement vaut $E_1 = 800$ W.m^{-2} ; par ciel voilé l'éclairement vaut $E_2 = 300$ W.m^{-2} et par temps gris, $E_3 = 100$ W.m^{-2}.
   Calculer la tension aux bornes d'une cellule quand elle n'est pas branchée ($i = 0$) pour les trois éclairements E_1, E_2 et E_3. On notera U_{C1}, U_{C3} et U_{C3} ces trois tensions à vide.
3. Calculer numériquement i_{cc} le courant de court-circuit ($u = 0$) pour les trois éclairements, on les notera i_{cc1}, i_{cc2} et i_{cc3}.
4. Tracer l'allure des trois caractéristiques sur lesquelles on fera apparaître les points remarquables.
5. Déterminer l'expression de la puissance fournie P_u par la cellule.

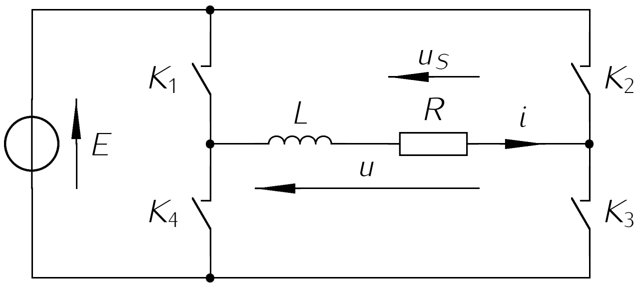
   Pour la suite, on envisagera le cas où le flux solaire est maximal $E_1 = 800$ W.m^{-2}.
6. On cherche les conditions pour que la puissance P_u soit maximale.
   On admettra que dans ces conditions on a : $\exp\frac{u}{U_0} \gg 1$.
   Établir la relation permettant de calculer u_{Max}, valeur de u lorsque P_u est maximale.
   Par une méthode numérique, on trouve $u_{\text{Max}} = 0{,}490$ V. Calculer la valeur de l'intensité i_{Max} correspondante.
   On branche aux bornes de la cellule une résistance R. Quelle valeur faut-il donner à la résistance R pour que ces conditions soient réalisées ?
7. On définit le rendement η de la cellule comme étant le rapport de la puissance maximale sur la puissance solaire reçue par toute la surface de la cellule.
   Écrire l'expression de η. Faire l'application numérique. Commenter.

   Dans le but d'améliorer les performances du dispositif, on cherche à associer les cellules en série et en parallèle.
8. On met en parallèle n_p branches identiques constituées de n_s cellules en série.
   On prendra $n_s = 50$ et $n_p = 25$.
   Exprimer la tension V_D aux bornes du système et l'intensité I_D qui le traverse si chaque cellule fournit sa puissance maximale. Effectuer les applications numériques.

9. Déterminer numériquement la valeur R_M de la résistance à brancher aux bornes du capteur solaire ainsi constitué pour que la condition de puissance maximale soit réalisée.
10. On suppose maintenant que le capteur solaire n'alimente plus une résistance mais charge une batterie de résistance interne négligeable de 24 V. Quelle est la tension observée aux bornes de chaque cellule ? Quel courant traverse alors une cellule et la batterie ? Effectuer les applications numériques.

B. Étude de l'onduleur

Cette partie étudie un onduleur de tension autonome à commande symétrique ou décalée. Un onduleur est un convertisseur de tension continue en tension alternative. Le montage est celui représenté sur la figure 2 ci-dessous.



Les quatre interrupteurs bidirectionnels K_1, K_2, K_3 et K_4 sont commandés électriquement de telle façon que :

Pour $nT < t < (n+1/2)T$	K_1 et K_3 sont fermés	K_2 et K_4 ouverts
Pour $(n+1/2)T < t < (n+1)T$	K_1 et K_3 sont ouverts	K_2 et K_4 fermés

Le générateur est une source de tension idéale de force électromotrice E constante. L est une inductance pure dite de lissage et R représente "la charge" c'est-à-dire ce qui se trouve en aval du circuit. Cette dernière est modélisée par un résistor de résistance R.

1. Tracer la courbe $u(t)$ en indiquant les points remarquables.
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, courant circulant dans R.
3. Si $i_1(t)$ est la solution de cette équation pour $0 < t < T/2$ et $i_2(t)$ la solution de cette équation pour $T/2 < t < T$, déterminer les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de R, L et E et en fonction de deux constantes d'intégration A_1 et A_2 que l'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant.
   On pose $\tau = \frac{L}{R}$.

   On se place en régime permanent et on cherche à déterminer les valeurs de A_1 et A_2.
   On pose $\alpha = \exp\left[-\frac{T}{2\tau}\right]$.
4. Écrire la "condition de raccordement" pour le courant en $t = T/2$ (c'est-à-dire la relation liant $i(T^-/2)$ à $i(T^+/2)$) ; justifier.
   On obtient ainsi une première équation entre A_1 et A_2.
5. En écrivant que le courant est périodique, écrire une seconde relation entre A_1 et A_2. Résoudre le système ainsi trouvé.
6. Exprimer $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Tracer le graphe $i(t)$ en faisant apparaître les points remarquables.

Unité de cellules photovoltaïques

A. Cellules photovoltaïques

1. Il s'agit d'un dipôle non-linéaire (la relation constitutive n'est pas une équation linéaire), polarisé (si on change i en $-i$ et u en $-u$ la relation n'est pas la même (dit autrement la caractéristique n'est pas symétrique par rapport à O) et actif dès lors que l'éclairement est non nul (i ne vaut pas 0 lorsque u vaut 0).

2. En circuit ouvert $i = 0$, $u = U_C$ et la relation donnée par l'énoncé s'écrit

$$0 = I_s\left[\exp\left(\frac{U_C}{U_0}\right) - 1\right] - \alpha SE \Rightarrow \boxed{U_C = U_0 \ln\left[1 + \frac{\alpha SE}{I_s}\right]}$$

Les applications numériques donnent :

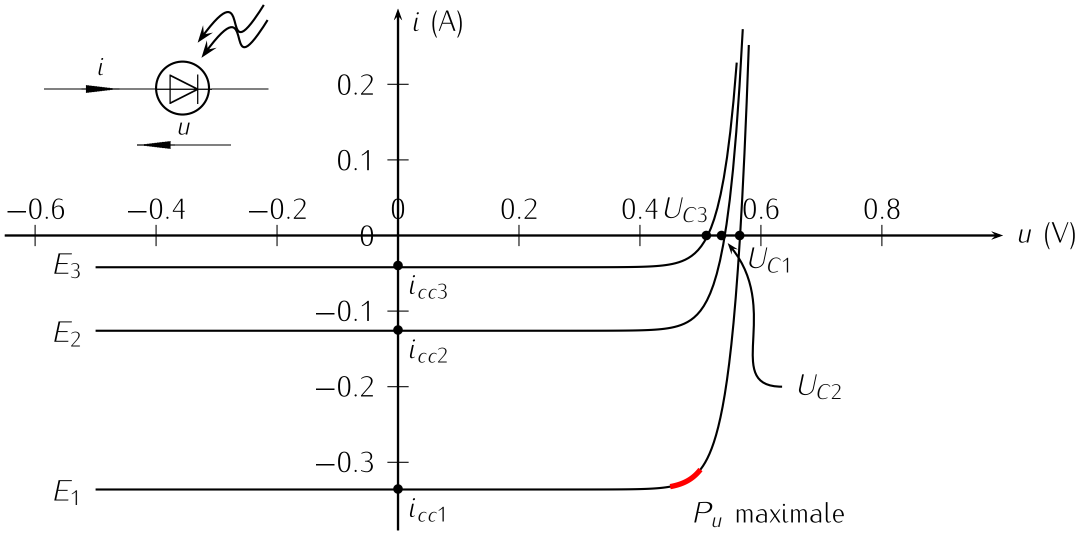
Éclairements	$E_1 = 800$ W.m^{-2}	$E_2 = 300$ W.m^{-2}	$E_3 = 100$ W.m^{-2}
Tensions en circuit ouvert	$U_{C1} = 0{,}57$ V	$U_{C2} = 0{,}54$ V	$U_{C3} = 0{,}51$ V
Intensités de court circuit	$i_{cc1} = -0{,}34$ A	$i_{cc2} = -0{,}13$ A	$i_{cc3} = -0{,}04$ A

3. De même, en court circuit $u = 0$ et $i = i_{cc}$ tel que

$$i_{cc} = I_s\left[\exp\left(\frac{0}{U_0}\right) - 1\right] - \alpha SE \Rightarrow \boxed{i_{cc} = -\alpha SE}$$

Les valeurs numériques ont étés reportées dans le tableau précédent.

4. L'allure des trois caractéristiques correspond à des exponentielles croissantes.



5. La cellule est orientée selon la convention d'orientation récepteur et par conséquent, la puissance **fournie** est

$$\boxed{P_u = -u.i = u\left[\alpha SE - I_s\left(\exp\left(\frac{u}{U_0}\right) - 1\right)\right]}$$

On remarque que $u.i < 0$, c'est-à-dire $P_u > 0$ pour $0 < u < U_C$ (quart de plan inférieur droit sur la figure), ce sera le domaine dans lequel il faudra se placer pour que la cellule fournisse effectivement de l'énergie au reste du circuit.

6. Graphiquement, on peut déjà remarquer que P_u est maximale "dans le coude" de la caractéristique précédente (Cf figure pour $E = E_1$).

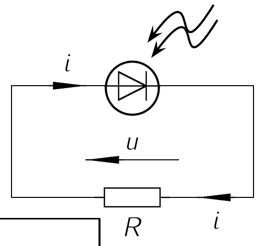
Pour déterminer $u_{\max}$ avec précision, sachant qu'il s'agit de la valeur de u pour laquelle P_u est maximale, on utilise le fait que pour cette valeur de u, la fonction $P_u(u)$ admet un extremum (maximum) et par conséquent, $\frac{dP_u}{du} = 0$ en $u = u_{\max}$. On utilise une expression simplifiée de $P_u(u)$ avant d'effectuer la dérivation. En effet, $P_u = \alpha SEu - uI_s[\exp(\frac{u}{U_0}) - 1] \simeq \alpha SEu - uI_s \exp\frac{u}{U_0}$ et

$$\frac{dP_u}{du} = 0 \Rightarrow \alpha SE - I_s \exp\frac{u_{\max}}{U_0} - \frac{u_{\max}I_s}{U_0}\exp\frac{u_{\max}}{U_0} = 0 \Rightarrow \boxed{[1 + \frac{u_{\max}}{U_0}].\exp\frac{u_{\max}}{U_0} = \frac{\alpha SE}{I_s}}$$

L'énoncé indique que par une méthode numérique on trouve $u_{\text{Max}} = 0{,}490$ V ce qui est bien cohérent avec la caractéristique précédente.

Connaissant $u_{\max}$, on en déduit $\boxed{i_{\text{Max}} = I_s\left[\exp\left(\frac{u_{\max}}{U_0}\right) - 1\right] - \alpha SE \simeq -0{,}32 \text{ A}}$ ce qui, encore une fois, est en accord avec la caractéristique.

On branche un résistor en parallèle de façon à mettre en concordance $u_{\max}$ et $i_{\max}$ (Cf figure ci-contre).



En reprenant les notations de l'énoncé, le résistor est en convention générateur et la loi d'Ohm s'écrit alors $u = -Ri$ et ici $\boxed{R = -\dfrac{u_{\max}}{i_{\max}} = -\dfrac{0{,}490}{0{,}32} \simeq 1{,}53\ \Omega}$

(méfiez-vous si vous trouvez une résistance négative !)

7. L'énoncé définit le rendement η de la cellule comme le rapport de la puissance maximale $P_{\max}$ sur la puissance solaire P_s reçue par toute la surface de la cellule.
Or l'éclairement E s'exprime en W.m^{-2}, il s'agit donc d'une puissance par unité de surface.
Cette analyse dimensionnelle permet de d'écrire $P_s = SE$ et

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\max}}{P_s} \simeq \frac{u_{\max}[\alpha SE - I_s \exp \frac{u_{\max}}{U_0}]}{SE} = u_{\max}\left[\alpha - \frac{I_S}{SE}\exp\frac{u_{\max}}{U_0}\right] \simeq 0{,}16}$$

La valeur du rendement n'est que de $\boxed{\text{16 \%, c'est assez faible}}$ et c'est pourquoi on est amené à associer un nombre important de cellules. Il faudra néanmoins s'arranger pour maintenir $P_u = P_{\max}$ pour chaque cellule (Cf. 9.).

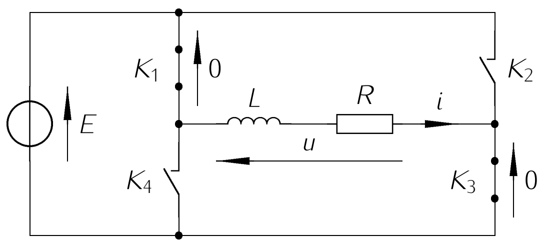
8. Lorsqu'une cellule fournit un maximum de puissance, la tension à ses bornes est $u_{\max}$ et l'intensité qui la traverse $i_{\max}$. On associe n_p branches en parallèle, chaque branche contenant n_s cellules en série.
La tension aux bornes de chaque branche est, par additivité des tensions, $\boxed{V_D = n_s.u_{\max} \simeq 24{,}4\ \text{V}}$.
Chacune de ces branches est traversée par un courant d'intensité $i_{\max}$ et la loi des noeuds implique que le courant qui traverse l'ensemble est $\boxed{I_D = n_p.i_{\max} \simeq -8{,}0\ \text{A}}$.
Remarque : la puissance utile est alors $P_u = -V_D.I_D = 195$ W.

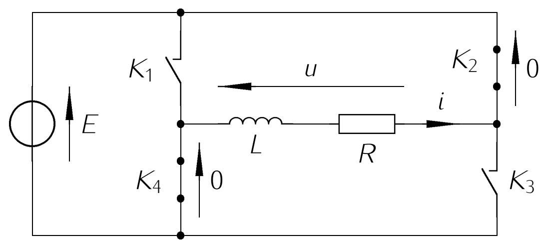
9. Par analogie avec la question 5, on obtient (loi d'Ohm en convention générateur), $\boxed{R_M = -\frac{V_D}{I_D} \simeq 3{,}1\ \Omega}$.

10. C'est maintenant la batterie qui impose la tension $U_b = 24$ V aux bornes de l'association, c'est-à-dire aux bornes de chaque branche constituée de n_s cellules.
On en déduit $\boxed{u = \frac{U_b}{n_s} \simeq 0{,}48\ \text{V et } i = I_s[\exp\frac{u_{\max}}{U_0} - 1] - \alpha SE \simeq -0{,}32\ \text{A}}$ et enfin l'intensité qui traverse la batterie est $\boxed{I_b = n_p.i \simeq -8{,}1\ \text{A}}$.
Remarque : les valeurs de i et u sont proches de $u_{\max}$ et $i_{\max}$, le type de cellule est donc bien adaptée à la batterie (ou inversement).

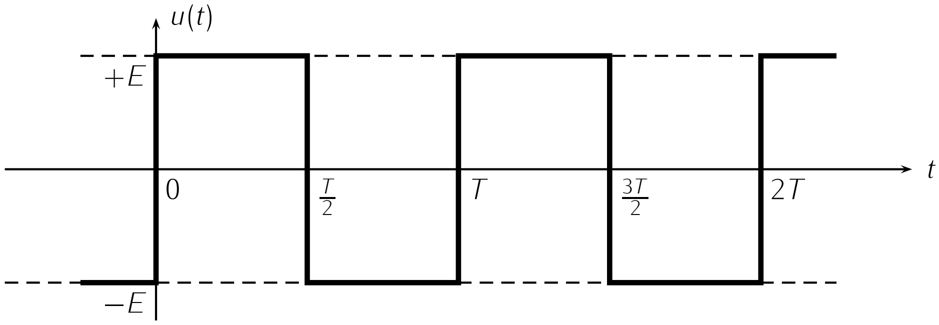
B. Étude de l'onduleur

1. Pour $nT < t < (n+1/2)T$, on obtient le circuit ci-dessous à gauche. L'application d'une loi des mailles qui passe par le générateur, les interrupteurs K_1 et K_3 fermés (la tension à leurs bornes est alors nulle) et l'inductance donne $E - 0 - u - 0 = 0 \Rightarrow u = E$.





De même, pour $(n+1/2)T < t < (n+1)T$ (circuit ci-dessus à droite), la loi des maille passant par le générateur et les deux interrupteurs K_2 et K_4 fermé s'écrit $E - 0 + u - 0 = 0 \Rightarrow u = -E$.
On en déduit le graphe représenté ci-dessous.



On a ainsi produit un signal créneau de période T.

2. À tout instant t, on peut écrire $u(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$ et en utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit :
   - pour $nT < t < (n + 1/2)T$ $u = E \Rightarrow L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$ et
   - pour $(n + 1/2)T < t < (n + 1)T$ $u = -E \Rightarrow L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = -E$.

   $\Rightarrow \boxed{\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{i(t)}{\tau} = \pm\dfrac{E}{L}}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$ la constante de temps du circuit.

3. La solution de ce type d'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants (tous de même signe) est la somme de la solution de l'équation sans second membre $A.\exp(-\frac{t}{\tau})$ et d'une solution particulière de même nature que le second membre : une constante B ici telle que $\frac{B}{dt} + \frac{B}{\tau} = \pm\frac{E}{L} \Rightarrow B = \pm\frac{\tau E}{L} = \pm\frac{E}{R}$.

   On en déduit $\boxed{i_1(t) = \dfrac{E}{R} + A_1.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{et} \quad i_2(t) = -\dfrac{E}{R} + A_2.e^{-\frac{t}{\tau}}}$

4. Par continuité de l'intensité du courant qui traverse L, $i(T^-/2)$ est égal à $i(T^+/2)$ d'où ici

$$i_1\left(\frac{T}{2}\right) = i_2\left(\frac{T}{2}\right) \Rightarrow \frac{E}{R} + A_1.e^{-\frac{T}{2\tau}} = -\frac{E}{R} + A_2.e^{-\frac{T}{2\tau}} \Rightarrow \frac{E}{R} + \alpha A_1 = -\frac{E}{R} + \alpha A_2 \Rightarrow \boxed{A_1 = A_2 - \frac{2E}{\alpha R}}$$

5. L'intensité $i(t)$ est une fonction périodique de période T et par exemple, $i(0) = i(T)$ d'où ici,

$$i_1(0) = i_2(T) \Rightarrow \frac{E}{R} + A_1 = -\frac{E}{R} + A_2.e^{-\frac{T}{\tau}} = -\frac{E}{R} + \alpha^2 A_2 \Rightarrow \boxed{A_1 = \alpha^2 A_2 - \frac{2E}{R}}$$

   Reste à résoudre le système de deux équations précédent. Par identification, on obtient

$$A_2 - \frac{2E}{\alpha R} = \alpha^2 A_2 - \frac{2E}{R} \Rightarrow A_2 = -\frac{2E}{R}\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{1-\alpha^2} = -\frac{2E}{R}\frac{(\alpha-1)/\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)}$$

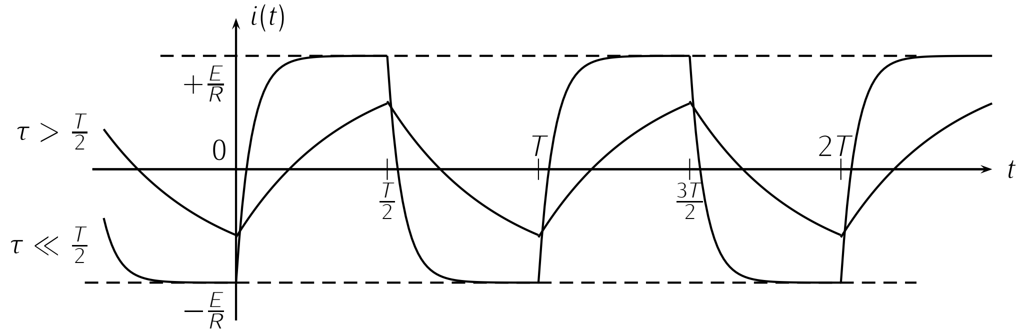
$$\Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{2E}{\alpha(1+\alpha)R} \text{ et } A_1 = \frac{-2E}{(1+\alpha)R}}$$

6. En remplaçant A_1 et A_2 dans l'expression de $i_1(t)$ et $i_2(t)$, on en déduit :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \frac{2}{1+\alpha}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2(t) = -\frac{E}{R}\left[1 - \frac{2}{\alpha(1+\alpha)}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}$$

   i_1 et i_2 vont tendre exponentiellement vers $\pm\frac{E}{R}$ avec la constante de temps τ en tout cas si u ne passe pas de $\pm E$ à son opposé avant.

   On obtiendra ainsi différentes formes selon la valeur du rapport τ sur $\frac{T}{2}$.



On assiste à une suite d'établissements / coupure de courant dans l'inductance.