CORRIGÉ DU DM4 (suites et séries de fonctions)

Sujet inspiré CCINP MP

1. Le cours donne les implications suivantes :

1. $[\sum f_n$ converge uniformément sur $I]$ $\overset{\text{Théorème 15}}{\Leftarrow}$ $[\sum f_n$ converge normalement sur $I]$
2. $[\sum f_n$ converge uniformément sur $I]$ $\overset{\text{Proposition 10}}{\Rightarrow}$ $[\sum f_n$ converge simplement sur $I]$
3. $[\sum f_n$ converge absolument sur $I]$ $\overset{\text{Proposition 14}}{\Leftarrow}$ $[\sum f_n$ converge normalement sur $I]$
4. $[\sum f_n$ converge absolument sur $I]$ $\Rightarrow$ $[\sum f_n$ converge simplement sur $I]$

   par le Théorème 14 du cours Séries numériques en travaillant avec $x \in I$ quelconque fixé.

2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a par inégalité triangulaire :

$$|f_n(x)| \leqslant \left|\frac{\cos(nx)}{2^n}\right| + \left|\frac{\sin(nx)}{3^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \text{ (ne dépend pas de } x\text{).}$$

On en déduit que $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ est un majorant de l'ensemble $\{|f_n(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ et $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ est le plus petit majorant de cet ensemble.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$.
De plus, les séries géométriques $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ convergent car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. Par linéarité, on obtient que la série $\sum \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ converge.
Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge ce qui signifie que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
En utilisant les résultats établis à la question 1, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum f_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\text{donc elle converge aussi uniformément, absolument et simplement sur } \mathbb{R}.}$$

2.(b) Considérons le cas $x = 0$.
La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(0) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc la série $\sum f_n$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
En utilisant les résultats établis à la question 1, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum f_n \text{ ne converge pas simplement sur } \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\text{donc elle ne converge ni absolument, ni uniformément, ni normalement sur } \mathbb{R}.}$$

3.(a) Soit $x \in [0,1]$.
La série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x^2+n}{n^2} \geqslant 0$.

La suite $\left(\dfrac{x^2}{n^2}+\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et elle converge vers 0.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge simplement sur } [0,1].}$$

3.(b) Soit $x\in[0,1]$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2}+\dfrac{1}{n}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2>1$ et constante multiplicative) mais la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc par somme, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|f_n(x)|$ diverge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \text{ ne converge absolument en aucune valeur } x \text{ de } [0,1].}$$

3.(c) Soit $x\in[0,1]$. Par le critère spécial des séries alternées (dont les hypothèses ont été vérifiées en 3.(a)), on obtient également pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1} \text{ (ne dépend pas de } x\text{)}.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}$ est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|, x\in[0,1]\}$.
Comme $\|R_n\|_\infty^{[0,1]}$ est le plus petit majorant de cet ensemble, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0\leqslant \|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}\right)=0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|R_n\|_\infty^{[0,1]}=0$ ou encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|R_n-\varphi\|_\infty^{[0,1]}=0$ en notant $\varphi : x\mapsto 0$.
On a ainsi prouvé que la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $\varphi : x\mapsto 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge uniformément sur } [0,1].}$$

4.(a) Soit $x\in]-1,1[$. La suite géométrique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car $|x|<1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur }]-1,1[\text{ vers la fonction } \varphi : x\mapsto 0.}$$

4.(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a par définition, $\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[} = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in]-1,1[}|f_n(x)-\varphi(x)| = \operatorname*{Sup}_{x\in]-1,1[}|x|^n$.
Comme la fonction $x\mapsto |x|^n$ est paire, on a $\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[} = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[0,1[} x^n$.
Comme la fonction $x\mapsto x^n$ est croissante sur $[0,1[$, on en déduit que $\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[} = \displaystyle\lim_{x\to 1} x^n = 1$.
On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Comme la suite $\left(\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ vers la fonction $\varphi : x\mapsto 0$ et donc :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément sur }]-1,1[.}$$

4.(c) Soit $x \in]-1,1[$. La série $\sum |f_n(x)| = \sum |x|^n$ converge (série géométrique de raison $|x| \in]-1,1[$).
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge absolument sur }]-1,1[.}$$

5. La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bornée.}}$$

Soit $x \in I$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \alpha_n x^n (1-x) \leqslant \alpha_1 x^n.$$

La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison $x \in]-1,1[$).
Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I.}$$

6.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| = f_n(x)$ puisque $\alpha_n x^n(1-x) \geqslant 0$.
La fonction f_n est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$:

$$f_n'(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1)) \text{ du signe de } n - x(n+1).$$

La fonction f_n est donc croissante sur $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right[$.
On en déduit qu'elle admet sur I un maximum atteint en $\frac{n}{n+1}$ qui vaut $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.
Ainsi :

$$\boxed{\|f_n\|_\infty^I = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.}$$

6.(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\|f_n\|_\infty^I = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{\alpha_n}{n+1} e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-1}$ par continuité de la fonction exponentielle.
Comme $e^{-1} \neq 0$, on a donc $e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} \sim e^{-1}$ et donc $\|f_n\|_\infty^I \sim \frac{\alpha_n}{ne}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^I \geqslant 0$.
Par comparaison, on en déduit que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty^I$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\alpha_n}{ne}$ sont de même nature.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge normalement sur } I \text{ si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}}$$

7.(a) Soit $x \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant n+1$.
Comme $x \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{N} x^k = \frac{x^{n+1} - x^{N+1}}{1-x}.$$

Comme $x \in]-1,1[$, on obtient par passage à la limite :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.}$$

7.(b) On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
D'après la question 5., la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I. Montrons que la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.
Soit $x \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante donc pour tout $k \geqslant n+1$, on a $\alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$ donc comme $x^k(1-x) \geqslant 0$, on a :

$$\alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant n+1$. Par croissance (les séries en jeu sont convergentes), on obtient :

$$0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1} \text{ (ne dépend pas de } x).$$

Ainsi, α_{n+1} est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|, x \in I\}$.
Comme $\|R_n\|_\infty^I$ est le plus petit majorant de cet ensemble, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \|R_n\|_\infty^I \leqslant \alpha_{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{n+1} = 0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^I = 0$.
On a donc prouvé que la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0 alors la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I.}$$

7.(c) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel ℓ positif et on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k \geqslant \ell$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$. On a alors par croissance (les séries en jeu convergent) :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \geqslant \ell(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \ell x^{n+1}.$$

On a également $R_n(x) \leqslant \|R_n\|_\infty^I$ (car c'est un majorant).
On en déduit que $\ell x^{n+1} \leqslant \|R_n\|_\infty^I$ (ne dépend pas de x).
Ainsi, $\|R_n\|_\infty^I$ est un majorant de l'ensemble $\{\ell x^{n+1}, x \in I\}$ donc $\operatorname*{Sup}\limits_{x\in I} \ell x^{n+1} \leqslant \|R_n\|_\infty^I$.
Or, la fonction $x \mapsto \ell x^{n+1}$ est croissante sur $I = [0,1[$ donc $\operatorname*{Sup}\limits_{x\in I} \ell x^{n+1} = \lim\limits_{x\to 1} \ell x^{n+1} = \ell$.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell \leqslant \|R_n\|_\infty^I$.
Comme la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^I = 0$ et on en déduit par passage à la limite que $\ell = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ alors la suite } (\alpha_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers 0.}}$$

8.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$.
La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$) donc d'après la question 6.(b), la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I.

$$\boxed{\text{Si pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha = \frac{1}{n} \text{ alors la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge normalement sur } I.}$$

8.(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = 1$.
La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive.
Comme elle ne converge pas vers 0, d'après 7.(c), la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

$$\boxed{\text{Si pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha = 1 \text{ alors la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } I.}$$

8.(c) On pose $\alpha_1 = \dfrac{1}{\ln 2}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln n}$.
La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive.
Elle converge vers 0 donc d'après 7.(b), la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n} = \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. On a alors $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k\ln k}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 3$. En sommant pour k allant de 2 à $N-1$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_2^N \frac{1}{t\ln t}\, dt = [\ln|\ln t|]_2^N = \ln(\ln N) - \ln(\ln 2)$$

d'où :

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \frac{1}{N\ln N} + \ln(\ln N) - \ln(\ln 2).$$

Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{N\ln N} + \ln(\ln N) - \ln(\ln 2)\right) = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k\ln k} = +\infty$ par inégalité.
Ainsi, la série $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.
On en déduit par 6.(b) que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur I.

$$\boxed{\text{Si } \alpha_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geqslant 2,\ \alpha_n = \frac{1}{\ln n} \text{ alors la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ mais elle ne converge pas normalement sur } I.}$$

9.(a) $\boxed{\text{La convergence uniforme n'implique pas la convergence normale.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 8.(c) converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.
9.(b) $\boxed{\text{La convergence simple n'implique pas la convergence uniforme.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 8.(b) converge simplement sur I (d'après la question 5) mais ne converge pas uniformément sur I.
9.(c) $\boxed{\text{La convergence absolue n'implique pas la convergence normale.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 4 converge absolument sur $]-1, 1[$ (d'après 4.(c)) mais ne converge pas normalement sur $]-1,1[$ (car elle ne converge pas uniformément d'après 4.(b) puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$).
9.(d) $\boxed{\text{La convergence simple n'implique pas la convergence absolue.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 3 converge simplement sur $[0,1]$ (d'après 3.(a)) mais ne converge pas absolument sur $[0,1]$ (d'après 3.(b)).

10. $\boxed{\text{La convergence uniforme n'implique pas la convergence absolue.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 3 converge uniformément sur $[0,1]$ (d'après 3.(c))

mais ne converge pas absolument sur $[0,1]$ (d'après 3.(b)).

$\boxed{\text{La convergence absolue n'implique pas la convergence uniforme.}}$

Contre-exemple : La série définie à la question 4 converge absolument sur $]-1,1[$ (d'après 4.(c)) mais ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ (d'après 4.(b)).