DM5 (suites et séries de fonctions)
Pour le jeudi 23 novembre

Problème : séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle « série trigonométrique » une série de fonctions du type

$$\sum (a_n C_n + b_n S_n)$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels et où pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions C_n et S_n sont définies par :

$$C_n : x \mapsto \cos(nx) \quad \text{et} \quad S_n : x \mapsto \sin(nx).$$

Dans la première partie, on étudie quelques exemples.
Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Partie 1 : Exemples

1. Montrer que la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2^n}C_n + \frac{1}{3^n}S_n\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout entier $p \geqslant 2$, déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur pour tout $x \in \mathbb{R}$ de :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$
(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

3. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

4. Écrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos x)\cos(\sin x)$ comme la somme d'une série trigonométrique.
On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme la somme d'une série de fonctions.

Partie 2 : Propriétés

Une condition suffisante

1. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques.
Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

3. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

4. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.

5. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ pour k et n entiers.

6. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$.
Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0.
On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,dx = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

7. Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose :
$$u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} \text{ et pour tout } n \geqslant 1,\ u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx).$$
On suppose ici que la série trigonométrique $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction g :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx)).$$
Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

8. Il est admis que si une fonction $h \in \mathscr{C}_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$ alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)C_n + \beta_n(f)S_n)$ d'une fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a
$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

9. Si $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$?
   Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

10. *Exemple.* Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ définie par : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

    Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$.

    Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

11. En déduire les sommes
    $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
    Déduire alors de la seconde somme la valeur de
    $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

12. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?

    Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum n a_n$ et $\sum n b_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum (a_n C_n + b_n S_n)$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$, soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

13. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n} C_n$.