

# Chapitre 12

## Suites réelles et complexes

Jusqu'au §8, on ne considère que des suites réelles.

### 1 Généralités

#### Définition 1.1

Une suite (réelle) est une application

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On note pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$   $u_n = u(n)$  et  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles, et la suite  $u$  se note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)$ .

#### Rappels :

1. On peut ajouter et multiplier deux suites : pour  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit pour tout entier  $n$

$$(u + v)_n = u_n + v_n, \quad (\lambda \cdot u)_n = \lambda u_n, \quad (uv)_n = u_n v_n.$$

2. Rappelons qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} \geq u_n$ , et décroissante si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} \leq u_n$ . Dans le cas où la suite est à termes **strictement positifs**, la suite est croissante si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

3. La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
4. Une suite  $(u_n)$  est *constante* si  $u_n = u_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et *stationnaire* s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n = u_{n+1}$  pour tout  $n \geq n_0$ , i.e. si  $(u_n)$  est constante à partir d'un certain rang.
5. Les suites constantes sont les seules à être à la fois croissante et décroissante.
6. La suite arithmétique de premier terme  $a \in \mathbb{R}$  et de raison  $r \in \mathbb{R}$  est la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{et} \quad u_0 = a,$$

ou de manière équivalente par

$$u_n = a + nr.$$

On a

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Une telle suite est strictement croissante si  $r > 0$ , constante si  $r = 0$ , et strictement décroissante si  $r < 0$ .

7. La suite géométrique de premier terme  $a \in \mathbb{R}$  et de raison  $q \in \mathbb{R}$  est la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$v_{n+1} = qv_n \quad \text{et} \quad v_0 = a,$$

ou de manière équivalente par

$$v_n = aq^n.$$

On a

$$\sum_{k=0}^n v_k = a \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{si } q \neq 1, \quad (n+1)a \quad \text{sinon.}$$

Une telle suite est croissante si  $a \geq 0$  et  $q \geq 1$ , décroissante si  $a \leq 0$  et  $q \geq 1$ , etc...

8. Une suite  $(u_n)$  est majorée (resp. minorée) s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n \leq M$  (resp.  $M \leq u_n$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Elle est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, ou encore si la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

### Proposition 1.2

Les combinaisons linéaires et les produits de suites bornées sont des suites bornées.

### Définition 1.3

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Une *suite extraite* (ou *sous-suite*) de  $(u_n)$  est une suite  $(v_n)$  telle qu'il existe une fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ .

### Remarque.

On note souvent une sous-suite de la façon suivante :

$$(u_{k_n})_{n \in \mathbb{N}},$$

et on a donc  $\varphi(n) = k_n$ .

### Remarque.

Comme  $\varphi$  est strictement croissante, on a  $\varphi(n) \geq n$  pour tout entier  $n$ .

## 2 Convergence, divergence et divergence vers l'infini

### 2.1 Convergence et divergence

#### Définition 2.1 (Suite convergente)

Une suite  $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est *convergente* s'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

ou plus formellement :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Le réel  $\ell$  est alors unique et est la limite de  $(u_n)$ , qui est notée  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

#### Définition 2.2 (À partir d'un certain rang)

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie une propriété  $P$  à partir d'un certain rang s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  vérifie la propriété  $P$ .

#### Méthode 2.3

Si une suite  $(u_n)_n$  vérifie une propriété  $P_1$  à partir du rang  $n_1$ , et une propriété  $P_2$  à partir du rang  $n_2$ , alors elle vérifie les propriétés  $P_1$  et  $P_2$  à partir du rang  $\max(n_1, n_2)$ .

#### Méthode 2.4

Pour démontrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, on utilisera en général les théorèmes qui suivent. Mais parfois, il faut revenir à la définition, et la méthode est alors la suivante.

On essaye de deviner la limite  $\ell$ , puis on choisit un  $\varepsilon > 0$  quelconque, et on démontre que pour cet epsilon là, il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq N$ ,  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ . La démonstration étant faite pour un epsilon quelconque, elle est valable pour tous les epsilons  $> 0$ , donc la suite converge bien vers  $\ell$ .

#### Remarque.

Il est important de noter que pour montrer qu'une suite converge vers un certain réel, il suffit de montrer la relation de la définition pour tous les  $\varepsilon > 0$  plus petit par exemple que 1 (ou  $\sqrt{2}$ , ou tout réel  $> 0$ ). Ce sont les "petites" valeurs de  $\varepsilon$  qui comptent, c'est à dire (par exemple) que si  $u$  est une suite et  $\ell \in \mathbb{R}$ , on a

$$\left( \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon \right) \iff \left( \forall \varepsilon \in ]0, 1], \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon \right).$$

De même, si  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\left( \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon \right) \iff \left( \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| < a\varepsilon \right).$$

**Définition 2.5 (Suite divergente)**

Une suite  $(u_n)$  est divergente si elle n'est pas convergente, *i.e.* si

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 \mid \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

**Remarque.**

La négation de l'implication donne plutôt

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 \mid \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Mais les deux sont équivalents. On utilise en général l'inégalité large.

**Proposition 2.6**

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . Une suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si et seulement si la suite  $(u_n - \ell)$  converge vers 0.

**Méthode 2.7**

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ , on montre (presque) toujours que la suite  $(u_n - \ell)$  tend vers 0. Pour cela, on majore  $|u_n - \ell|$ .

**Proposition 2.8**

Soient  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

1. Si  $(v_n)$  converge vers 0 et si  $|u_n - \ell| \leq v_n$  à partir d'un certain rang, alors  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .
2. Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , alors  $(|u_n|)$  converge vers  $|\ell|$ .

**Remarque.**

La réciproque du 2 est fautive :  $((-1)^n)$ .

**Méthode 2.9**

Soit une suite  $(u_n)$ , un entier  $n_0 \in \mathbb{N}$ , un réel  $\ell$  et un réel  $\lambda \in [0, 1[$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_{n+1} - \ell| \leq \lambda |u_n - \ell|$ . On montre alors par récurrence sur  $n \geq n_0$  que  $|u_n - \ell| \leq \lambda^{n-n_0} |u_{n_0} - \ell|$ , et donc que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

**Proposition 2.10**

Soient  $a, \ell \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)_n$  une suite convergente vers  $\ell$ . Si  $\ell > a$  (resp.  $\ell < a$ ), alors  $u_n > a$  (resp.  $u_n < a$ ) à partir d'un certain rang.

**Corollaire 2.11**

Soit  $(u_n)_n$  une suite convergente vers un réel  $\ell$ . Si  $\ell > 0$  (resp.  $\ell < 0$ ), la suite  $(u_n)_n$  est minorée à partir d'un certain rang par un réel  $> 0$  (resp. majorée à partir d'un certain rang par un réel  $< 0$ ). En particulier, si  $\ell \neq 0$ , la suite  $(|u_n|)_n$  est minorée à partir d'un certain rang par un réel  $> 0$ .

**Remarques.**

1. Attention, le résultat est faux si  $\ell = 0$ , comme le prouve l'exemple de la suite  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Il faut bien faire la différence entre

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

et

$$\exists a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a.$$

La deuxième affirmation implique la première, mais la réciproque est fautive, comme le prouve l'exemple de la suite  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

En particulier, dans le deuxième cas, on pourra étudier la limite de  $(1/u_n)$ .

### Corollaire 2.12

Toute suite convergente est bornée.

### Remarque.

La réciproque est évidemment fautive, comme le prouve l'exemple de la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 2.2 Suites divergentes vers l'infini

### Définition 2.13

Une suite  $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \geq A,$$

et elle tend vers  $-\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \leq A.$$

### Remarque.

Dans le cas de  $+\infty$ , on peut remplacer " $A \in \mathbb{R}$ " par " $A \geq 0$ " ou " $A \geq a$ " où  $a$  est un réel fixé, et dans le cas de  $-\infty$ , on peut remplacer " $A \in \mathbb{R}$ " par " $A \leq 0$ " ou " $A \leq a$ " où  $a$  est un réel fixé.

### Proposition 2.14

Une suite divergente vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) est minorée (resp. majorée).

## 3 Opérations sur les limites

### 3.1 Combinaisons linéaires et produit

#### Proposition 3.1

Les combinaisons linéaires et les produits de suites convergentes vers 0 sont des suites convergentes vers 0.

**Proposition 3.2**

1. Le produit d'une suite bornée par une suite convergente vers 0 est une suite convergente vers 0.
2. En particulier, le produit d'une suite convergente par une suite convergente vers 0 est une suite convergente vers 0.

**Théorème 3.3**

Les combinaisons linéaires et les produits de suites convergentes sont des suites convergentes. De plus, si  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont des suites convergentes, et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right).$$

**Proposition 3.4**

La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

**Remarque.**

La somme ou le produit de deux suites divergentes est indéterminé. Par exemple, si  $u_n = (-1)^n$ ,  $v_n = (-1)^{n+1}$ , la suite  $(u_n) + (v_n)$  est divergente et la suite  $(u_n)(v_n)$  est convergente.

**3.2 Somme/produit avec une suite divergente vers l'infini****Proposition 3.5**

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  deux suites telle que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $(v_n)$  minorée. Alors  $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Corollaire 3.6**

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  deux suites telle que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $(v_n)$  convergente. Alors  $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Proposition 3.7**

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  deux suites telles que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $(v_n)$  minorée un réel strictement positif. Alors  $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Remarque.**

Le résultat est faux si on a juste  $v_n > 0$ . Il suffit de considérer  $u_n = n$  et  $v_n = \frac{1}{n}$ .

**Corollaire 3.8**

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  deux suites telles que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $(v_n)$  convergente vers un réel strictement positif. Alors  $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Méthode 3.9**

1. Lorsqu'on a affaire à une suite  $(u_n)$  divergente vers  $-\infty$ , on peut considérer  $(-u_n)$  pour appliquer les propositions précédentes.

2. On peut aussi utiliser cette proposition avec la suite  $(|u_n|)_n$  lorsque celle-ci tend vers  $+\infty$ .

### 3.3 Inverse d'une suite

#### Proposition 3.10 (Inverse d'une suite)

Soit  $(u_n)_n$  une suite convergente vers un réel  $\ell \neq 0$ . Alors la suite  $(u_n)_n$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang  $n_0$ , et la suite

$$\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$$

est convergente vers  $1/\ell$ .

#### Proposition 3.11

Soit  $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

1. Si  $(u_n)_n$  diverge vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$ , la suite  $(1/u_n)_n$  est bien définie à partir d'un certain rang et converge vers 0.
2. Si la suite  $(u_n)_n$  est  $> 0$  (resp  $< 0$ ) à partir d'un certain rang, et converge vers 0, la suite  $(1/u_n)_n$  est bien définie à partir d'un certain rang et tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
3. Si la suite  $(u_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang et converge vers 0, alors la suite  $(1/|u_n|)_n$  est bien définie à partir d'un certain rang et converge vers  $+\infty$ .

#### Remarque.

Si  $(u_n)_n$  tend vers 0 mais n'est pas de signe constant, on ne peut rien dire. Par exemple, si  $u_n = (-1)^n/n$ ,  $1/u_n = (-1)^n n$  qui ne tend ni vers  $-\infty$ , ni vers  $+\infty$ .

### 3.4 Compatibilité avec les inégalités

#### Proposition 3.12 (Conservation des inégalités larges par passage à la limite)

Soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites convergentes telles que  $u_n \geq v_n$  à partir d'un certain rang. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

#### Remarques.

1. C'est faux pour les inégalités strictes, puisque par exemple pour tout  $n > 0$ , on a

$$\frac{1}{n} > 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Quand on utilise cette proposition, on dit qu'"on passe à la limite dans l'inégalité".

**Méthode 3.13**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes telles que  $u_n < v_n$  à partir d'un certain rang. On veut montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ . ATTENTION : on ne peut pas passer à la limite dans une inégalité stricte.

- On peut montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ . Comme on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ , on aura le résultat voulu.
- On peut montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n + a \leq v_n$ . On aura alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + a \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

**Méthode 3.14**

- Si  $(u_n)$  est croissante et convergente, et il faut montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > a$  (où  $a \in \mathbb{R}$ ), il suffit de montrer que  $u_0 > a$ .
- Si  $(u_n)$  est strictement croissante et convergente, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > u_0$ , et même, pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > u_{n_0}$ .

**Proposition 3.15**

Soient  $a < b$  des réels et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente d'éléments de  $[a, b]$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in [a, b]$ .

**Théorème 3.16 (Théorème d'encadrement)**

Soient  $(u_n)_n, (w_n)_n$  deux suites convergentes ayant même limite  $\ell \in \mathbb{R}$ , et  $(v_n)_n$  une suite telle que

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

à partir d'un certain rang. Alors la suite  $(v_n)_n$  est convergente et converge vers  $\ell$ .

**Théorème 3.17 (Théorème de comparaison)**

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  deux suites telles que, à partir d'un certain rang,  $u_n \geq v_n$ .

1. Si  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .
2. Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , alors  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ .

**3.5 Suites extraites d'une suite convergente ou divergente vers l'infini****Proposition 3.18**

Soit  $(u_n)$  une suite convergente vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . Alors toute suite extraite de  $(u_n)$  est convergente vers  $\ell$ .

**Remarques.**

1. La réciproque est fautive, comme le prouve l'exemple de la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dont les suites extraites d'indices pairs et impairs sont convergentes.
2. On utilise souvent cette proposition pour montrer qu'une suite n'est pas convergente, en exhibant une sous-suite qui ne converge pas ou des sous-suites convergentes vers des limites différentes. Par exemple, si  $u_n = \sin(n\pi/2)$ , la sous-suite d'indices impairs ne converge pas, donc  $(u_n)$  ne converge pas.

**Proposition 3.19**

Soit  $(u_n)$  une suite dont les sous-suites d'indices pairs et impairs sont convergentes et ont même limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . Alors  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Proposition 3.20**

Soit  $(u_n)$  une suite divergente vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ). Toute suite extraite de  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

## 4 Suites particulières

### 4.1 Suites arithmetico-géométriques

**Définition 4.1 (Suites arithmetico-géométriques)**

Une suite  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est une suite arithmetico-géométrique s'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

On fixe une telle suite dans ce qui suit.

**Proposition 4.2**

1. Si  $a = 1$ , la suite  $(u_n)$  est arithmétique.
2. Si  $b = 0$ , la suite  $(u_n)$  est géométrique.

**Méthode 4.3 (Étude d'une suite arithmético-géométrique)**

On suppose  $a \neq 1$ .

1. On résout l'équation  $x = ax + b$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ . On note  $\ell = \frac{b}{1-a}$  l'unique solution.
2. On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n - \ell$ . On montre qu'elle est géométrique de raison  $a$ .
3. On en déduit une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ ,  $a$  et  $b$ .

**Proposition 4.4**

Avec les notations précédentes, la suite  $(u_n)$  converge si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

1.  $|a| < 1$ , et sa limite est  $\frac{b}{1-a}$ .
2.  $a \neq 1$  et  $u_0 = \frac{b}{1-a}$  : la suite est constante.
3.  $a = 1$  et  $b = 0$  : la suite est constante.

## 4.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

### Définition 4.5

Une suite  $(u_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'équation  $x^2 - ax - b = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{C}$  est l'équation caractéristique de la suite.

### Proposition 4.6

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ , et  $(u_n)$  une suite telle que pour tout entier  $n$ , on ait

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Soit  $(E)$  son équation caractéristique.

1. Si  $(E)$  admet deux solutions réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors il existe  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = xr_1^n + yr_2^n.$$

2. Si  $(E)$  admet une solution double  $r$ , il existe  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (x + yn)r^n.$$

3. Si  $P$  admet deux solutions complexes non réelles conjuguées  $re^{\pm i\theta}$  ( $r \in \mathbb{R}_+^*$ ), il existe  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(x \cos(n\theta) + y \sin(n\theta)).$$

## 5 Caractérisations séquentielles

### 5.1 Caractérisation séquentielle des bornes supérieures/inférieures

#### Proposition 5.1

Soit  $A$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ . Alors

1.  $M \in \mathbb{R}$  est la borne supérieure de  $A$  si et seulement si  $M$  est un majorant de  $A$  et s'il existe une suite convergente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = M$ .
2.  $m \in \mathbb{R}$  est la borne inférieure de  $A$  si et seulement si  $m$  est un minorant de  $A$  et s'il existe une suite convergente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = m$ .

#### Proposition 5.2

Soit  $A$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ . Alors  $A$  n'est pas majoré (resp. minoré) si et seulement s'il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $A$  qui diverge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

#### Remarque.

On aurait pu faire les deux propositions 5.1 et 5.2 en même temps en parlant de bornes supérieure et inférieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

## 5.2 Caractérisation séquentielle de la densité

### Proposition 5.3

Un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  est dense si, et seulement si, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .

## 6 Théorèmes de convergence

### 6.1 Suites monotones

#### Définition 6.1 (Borne supérieure/inférieure d'une suite)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. Les bornes supérieure et inférieure de  $(u_n)$  sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble  $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . On les note  $\sup u_n$  et  $\inf u_n$ .

#### Remarque.

Elles existent toujours, mais  $\sup u_n$  peut valoir  $+\infty$ , et  $\inf u_n$  peut valoir  $-\infty$ .

### Proposition 6.2

Une suite réelle  $(u_n)_n$  est majorée (resp. minorée) si et seulement si  $\sup u_n < +\infty$  (resp.  $\inf u_n > -\infty$ ).

#### Théorème 6.3 (Théorème de la limite monotone)

Soit  $(u_n)$  une suite croissante (resp. décroissante). Alors  $(u_n)$  est convergente si et seulement si elle est majorée, et alors sa limite est

$$\sup_n (u_n) \quad (\text{resp.} \quad \inf_n (u_n)).$$

Sinon,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad (\text{resp.} \quad -\infty).$$

### Méthode 6.4

Soit  $(u_n)$  une suite réelle à termes positifs. Alors la suite  $(S_n)$  de terme général  $\sum_{k=0}^n u_k$  est croissante.

Pour montrer qu'elle converge, on peut utiliser les techniques vues au chapitre 5 pour montrer qu'elle est majorée.

### 6.2 Suites adjacentes

#### Définition 6.5 (Suites adjacentes)

Deux suites  $(u_n), (v_n)$  sont adjacentes si

1. Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont monotones de sens contraire.

2. La suite  $(v_n - u_n)$  converge vers 0.

**Proposition 6.6**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites adjacentes avec  $(u_n)$  croissante. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq v_n$ .

**Théorème 6.7**

Deux suites adjacentes  $(u_n), (v_n)$  sont convergentes et ont même limite. De plus, si  $\ell \in \mathbb{R}$  est cette limite commune, et  $(u_n)$  est croissante, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq \ell \leq v_n$ .

**Remarque.**

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  et  $v_n$  sont des valeurs approchées de la limite  $\ell$ , resp. par défaut et par excès, et que l'erreur commise est majorée en valeur absolue par  $v_n - u_n$ .

**Méthode 6.8**

Si  $(u_n)$  est une suite décroissante qui converge vers 0, la suite  $(S_n)$  de terme général  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$  s'étudie en considérant les sous-suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$ , qui sont adjacentes.

## 6.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

**Théorème 6.9 (Bolzano-Weierstrass)**

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

## 7 Suites récurrentes

Dans ce paragraphe, on étudie les suites définies par une relation de récurrence du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

### 7.1 Définitions

**Définition 7.1 (Intervalle stable par une fonction)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . L'intervalle  $I$  est stable par  $f$  si  $f(I) \subset I$ .

**Définition 7.2 (Point fixe d'une fonction)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Un point fixe de  $f$  est un réel  $x \in I$  tel que  $f(x) = x$ .

**Proposition 7.3 (Suite récurrente)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , stable par  $f$ . La suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

est bien définie, et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ .

**Remarques.**

1. Ne pas confondre avec les suites du type  $u_n = f(n)$ .
2. La fonction  $f$  s'appelle la fonction d'itération de  $(u_n)$ .

**Dans toute la suite du paragraphe 7, on fixe une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  stable par  $f$ , et une suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in I$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .**

**7.2 Propriétés générales****Proposition 7.4**

Si  $I$  est borné, la suite  $(u_n)$  est bornée.

**Proposition 7.5**

On suppose que  $f$  est **continue** sur  $I$ .

1. Si la suite  $(u_n)$  est convergente vers  $\ell \in I$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .
2. Si  $I$  est un segment et si  $(u_n)$  converge, alors sa limite  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .

**Proposition 7.6**

- Si  $f(x) - x \geq 0$  pour tout  $x \in I$ , la suite  $(u_n)$  est croissante.
- Si  $f(x) - x \leq 0$  pour tout  $x \in I$ , la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**7.3 Cas d'une fonction croissante****Proposition 7.7**

Si  $f$  est croissante, la suite  $(u_n)$  est monotone. Plus précisément :

- si  $u_0 \leq u_1$ ,  $(u_n)$  est croissante.
- si  $u_0 \geq u_1$ ,  $(u_n)$  est décroissante.

**Corollaire 7.8**

On suppose  $f$  **continue** et **croissante**. Alors

- Si  $(u_n)$  est bornée, elle est convergente.
- Si l'intervalle  $I$  est borné, la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Méthode 7.9 (Plan d'étude)**

On considère une suite  $(u_n)$  comme ci-dessus. On l'étudie ainsi :

1. On montre que la fonction  $f$  est continue. On fait une étude rapide, et on trace son graphe.
2. On détermine un intervalle  $I$  stable par  $f$ , qui contient  $u_0$  (ou  $u_1, u_2$ ).
3. On résout l'équation  $f(x) = x$  d'inconnue  $x \in I$ . Si on peut, on étudie la signe de  $f(x) - x$  (parfois, il faut faire une étude de fonction).

4. Si on connaît le signe de  $f(x) - x$ , on connaît le signe de  $u_{n+1} - u_n$ , donc on peut savoir si  $(u_n)$  est monotone. Si elle est bornée, elle est convergente, sinon, elle est divergente.
5. Si  $f$  est croissante, on peut montrer par récurrence que  $(u_n)$  est monotone suivant que  $u_0 \leq u_1$  ou  $u_1 \leq u_0$ . On finit alors comme ci-dessus.

## 8 Suites complexes

Il n'y a pas de grande différence avec les suites réelles. On remplace la valeur absolue par le module. Notons qu'il n'y a par contre pas de notion de suite monotone.

Pour toute suite complexe  $(u_n)$ , on définit les suites  $\operatorname{Re}(u)$ ,  $\operatorname{Im}(u)$  et  $\bar{u}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\operatorname{Re}(u))_n = \operatorname{Re}(u_n), \quad (\operatorname{Im}(u))_n = \operatorname{Im}(u_n), \quad (\bar{u})_n = \bar{u}_n,$$

et la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{C}$  si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont convergentes respectivement vers  $\operatorname{Re}(\ell)$  et  $\operatorname{Im}(\ell)$ . En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\max(|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)|, |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)|) \leq |u_n - \ell| \leq |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| + |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)|.$$

On remarquera que :

1. Il n'y a pas de théorème de comparaison, ni de théorème d'encadrement, puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans  $\mathbb{C}$  compatible avec les opérations algébriques.
2. La suite  $(|u_n|)$  est réelle, et si  $(u_n)$  converge, alors  $(|u_n|)$  aussi, et si la limite de  $(u_n)$  est non nulle,  $(|u_n|)$  est minorée à partir d'un certain rang par un réel  $> 0$ .
3. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est valable pour les suites complexes : toute suite complexe bornée (au sens du module) admet une sous-suite convergente.

## 9 Compétences

1. Savoir montrer "à la main" qu'une suite converge vers un réel donné, *i.e.* savoir "trouver le  $\eta$  qui va bien avec le  $\varepsilon$ ".
2. Savoir déterminer la borne supérieure/inférieure d'un ensemble/d'une fonction à l'aide des suites.
3. Connaître les différentes techniques pour montrer qu'une suite est convergente.
4. Dans le cas d'une suite récurrente définie à l'aide d'une fonction continue, connaître l'enchaînement des raisonnements à faire.