Corrigé du DM 4

Exercice 1 : Deux démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton

Partie 1 : par trigonalisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On voit A comme une matrice complexe et on note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. On sait que : $u \in \mathcal{L}(C^n)$, donc $\chi_u \in \mathbb{C}[X]$. Or tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
Donc : χ_u est scindé.
Donc : u est trigonalisable.
Donc :

$$\boxed{\text{il existe une base } \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ de } \mathbb{C}^n \text{ telle que } T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T et pour tout $k \in [\![1\,;n]\!], P_k = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$.

2. $\chi_u = \chi_T = \det(XI_n - T)$
Or $XI_n - T$ est triangulaire supérieure, donc :

$$\boxed{\chi_u = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k).}$$

3. Par lecture des coefficients de $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$: $u(e_1) = \lambda_1 e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n = \lambda_1 e_1$
Donc : $u(e_1) - \lambda_1 e_1 = 0_E$
donc : $(X - \lambda_1)(u)(e_1) = (u - \lambda_1 \mathrm{id})(e_1) = 0_E$.
De plus : $(u - \lambda_1 \mathrm{id}) \in \mathcal{L}(E)$, donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1), (X - \lambda_1)(u)(x) = (u - \lambda_1 \mathrm{id})(x) = 0_E}$$

4. Soit $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, on suppose $\mathcal{P}(k) : \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k), P_k(u)(x) = 0$.

a) $P_{k+1} = (X - \lambda_{k+1})P_k$
donc : $P_{k+1}(u) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{id}) \circ P_k(u)$
or : d'après l'hypothèse de récurrence,
$\forall x \in \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n), P_k(u)(x) = 0_E$.
Donc :

$$\forall x \in \{e_1, \dots, e_n\}, P_{k+1}(u)(x) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{id})(P_k(x)) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{id})(0_E) = 0_E.$$

Donc :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \{e_1, \dots, e_k\}, P_{k+1}(u)(x) = 0.}$$

b) Pour tout $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ avec $i < j$, on note $t_{i,j}$ le coefficient i, j de la matrice T (si $i > j$ le coefficient est nul, si $i = j$ le coefficient est λ_i). Donc :
$u(e_{k+1}) = t_{1,k+1}e_1 + \dots + t_{k,k+1}e_k + \lambda_{k+1}e_{k+1}$
donc : $(u - \lambda_{k+1}\mathrm{id})(e_{k+1}) = u(e_{k+1}) - \lambda_{k+1}e_{k+1} = t_{1,k+1}e_1 + \dots + t_{k,k+1}e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
Donc :

$$\boxed{(u - \lambda_{k+1}\mathrm{id})(e_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).}$$

c) On pose $x = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{id})(e_{k+1})$, donc d'après la question précédente, $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
et par hypothèse de récurrence, $P_k(u)(x) = 0_E$.
De plus : $P_{k+1} = P_k \times (X - \lambda_{k+1})$
donc : $P_{k+1}(u)(e_{k+1}) = P_k(u) \circ (u - \lambda_{k+1}\mathrm{id})(e_{k+1}) = P_k(u)\Big((u - \lambda_{k+1}\mathrm{id})(e_{k+1})\Big) = P_k(u)(x) = 0_E$.
Donc :

$$\boxed{P_{k+1}(u)(e_{k+1}) = 0_E.}$$

d) $P_{k+1}(u) \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall j \in [\![1\,;k+1]\!], P_{k+1}(u)(e_j) = 0_E$,
Donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(k+1) : \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}), P_{k+1}(u)(x) = 0.}$$

5. On a montré par récurrence bornée :

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!], \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k), P_k(u)(x) = 0_E,$$

donc, pour $k = n$, comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $\forall x \in E, P_n(u)(x) = 0_E$
donc : $P_n(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
or : $P_n = \chi_u = \chi_T = \chi_A$.
donc, en notant $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$,

$$\chi_A(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\chi_A(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(P_n(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0_n.$$

Donc :

$$\boxed{\chi_A(A) = 0.}$$

par les matrices compagnons

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (non nulle) et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que
$\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

a) On pose pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!], x_k = f^k(x)$.
Pour $\forall k \in [\![1\,;n-2]\!], f(x_k) = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) = x_{k+1}$
pour $k = n-1, f(x_{n-1}) \in E$ or $\mathcal{B} = (x_0, \dots, x_{n-1})$ est une base de E, donc il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que : $f(x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k$.

Donc :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}}$$

b) Calculer le polynôme caractéristique de f : il faut le refaire, c'est un exemple dans le cours, mais ce n'est pas un résultat au programme. Donc pas ré-utilisable dans démo.

c) idem : on a déterminé dans le chapitre 3 le polynôme minimal d'une matrice compagnon, mais ce n'est pas un résultat du cours (on n'a pas besoin d'un résultat aussi fort ici).

$$\begin{aligned} \chi_f(f)(x) &= (X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k)(f)(x) \\ &= f^n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) \\ &= f^n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k \\ &= 0_E \end{aligned}$$

d'après la première question (car $f^n(x) = f(x_{n-1})$).

Donc :

$$\boxed{\chi_f(f)(x) = 0_E.}$$

2. Cas général. Soit $x \in E$ un vecteur non nul.

a) Soit $K = \left\{ j \in \mathbb{N}^* \mid (x, f(x), \dots, f^{j-1}(x)) \text{ est libre } \right\}$.
L'ensemble K est une partie de $\mathbb{N}^*$, on sait que $x \neq 0$, donc : (x) est libre. Donc : $1 \in K$ et K est non vide.
De plus : si $j > n = \dim E$, alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{j-1}(x))$ a $j > \dim E$ vecteurs, elle est donc liée. Donc : K est majoré par n.
Donc : K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^*$, donc K admet un plus grand élément k.
Donc : $\mathcal{F} = (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x))$ est libre et $(x, f(x), \dots, f^k(x))$ est liée, donc : $f(f^{k-1}(x)) = f^k(x) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
De plus pour tout $j \in [\![0\,;n-2]\!], f(f^j(x)) = f^{j+1}(x) \in \mathcal{F}$.
Donc : par linéarité de f, $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est stable par f.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c} k \text{ supérieur à 1 tel que : } \mathcal{F} = (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)) \text{ est libre et } \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \\ \text{est stable par } f. \end{array}}$$

b) On sait que $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe $y_k, \dots, y_{n-1} \in E$ tels que $\mathcal{B}' = (x_0, \dots, x_{k-1}, y_k, \dots, k_{n-1})$ est une base de E.
Comme $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est stable par f, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est triangulaire par bloc de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

c) D'après la question 1, appliquée à $\tilde{f}$ sur $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, on a $\chi_{\tilde{f}}(\tilde{f})(x) = 0_E$.
De plus, $\tilde{f}$ est un endomorphisme induit par f sur un sous-espace stable, donc $\chi_{\tilde{f}}$ divise χ_f.
Donc : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_f = Q \times \chi_{\tilde{f}}$
donc : $\chi_f(f)(x) = Q(f)\Big(\chi_{\tilde{f}}(f)(x)\Big) = Q(f)\Big(\chi_{\tilde{f}}(\tilde{f})(x)\Big) = Q(f)(0_E) = 0_E$.

Donc :

$$\boxed{\chi_f(f)(x) = 0.}$$

3. On a montré que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}, \chi_f(f)(x) = 0_E$,
donc :

$$\boxed{\chi_f(f) = 0.}$$