CORRIGÉ DS 3

EXERCICE 1

Q1. $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.

Si il existe $i \neq j$ et $x_i = x_j$ alors $V(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$, car il a deux colonnes identiques.

Dans la suite, $x_1, x_2 \dots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q2. Soit $P : t \mapsto V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.

- Le développement de $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ par rapport à la dernière colonne donne

$$P(t) = (-1)^{n+1}\Delta_{1,n} + (-1)^{n+2}\Delta_{2,n}t + (-1)^{n+3}\Delta_{3,n}t^2 + \dots + (-1)^{n+n}\Delta_{n,n}t^{n-1}$$

  avec $\Delta_{i,n}$ le déterminant obtenu en éliminant la ligne d'indice i et la colonne d'indice n de $V(x_1,x_2,\dots,x_n)$, les $\Delta_{i,n}$ ne dépendent pas de t. Donc P est une fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$.

  Le coefficient de t^{n-1} est $\Delta_{n,n} = V(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$

- On a $P(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, car c'est un déterminant avec deux colonnes identiques, donc le polynôme $\displaystyle\prod_{1\leq i\leq n-1} (X - x_i)$ divise P , si P n'est pas le polynôme nul il est de degré $n-1$, donc $P(X) = C \displaystyle\prod_{1\leq i\leq n-1} (X - x_i)$, avec $C \in \mathbb{C}$.

  C est le coefficient du plus haut degré de P donc $C = V(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$.

  Ce qui donne pour $t = x_n$ $V(x_1, x_2 \dots, x_n) = V(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) \displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n-1} (x_n - x_i)$.

- Montrons par récurrence que : $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i)$.

  La relation est vraie pour $n = 2$.On la suppose pour n .

  Soit $x_1, x_2 \dots, x_{n+1}$ sont $n + 1$ nombres complexes deux à deux distincts , on a

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2 \dots, x_{n+1}) &= V(x_1,x_2,\dots,x_n) \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i) \,.\, \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1\leq i<j\leq n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

  d'où le résultat.

Q3. Soit $A = (i^j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \dots & n^n \end{vmatrix}.$$

On factorise chaque ligne i , donc

$$\begin{array}{rcl}\det A & = & n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\ & = & n!\, V(1,2,\dots,n). \end{array}$$

car le déterminant d'une matrice est égale au déterminant de sa transposée.

Q4. On prend $a_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in [\![1,n]\!]$.

Les nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts et tous non nuls, et

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$$

Soit n nombre complexes $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, on a donc $V\left(x_1, \dots, x_n\right) \neq 0$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

est inversible . Le vecteur colonne $X = {}^t\left(x_1, \dots, x_n\right)$ est non nul donc MX l'est aussi .

Nous avons

$$MX = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n \end{pmatrix}.$$

ainsi l'une au moins des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 \quad \cdots \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.

PROBLEME

Partie I

6. **Un exemple -**

▷ La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

▷ On vérifie facilement que : $\Pi_1^2 = \Pi_1$, $\Pi_2^2 = \Pi_2$ ainsi Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteur. $\Pi_1 + 5\Pi_2 = A$, $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$ et $\Pi_1\Pi_2 = 0$

7. u un endomorphisme de E et P et Q deux polynômes premiers entre eux.

▷ Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$ donc $P(u)(x) = 0$ et $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$ donc $[(QP)(u)](x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$ ce qui donne $x \in \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$, ainsi $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$).

▷ On applique le théorème de Bézout : Il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$. Ce qui donne

$$\operatorname{Id}_E = (AP + BQ)(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$$

Donc si $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$, on a :

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) \\ &= \underbrace{A(u)(P(u)(x))}_{=0} + \underbrace{B(u)(Q(u)(x))}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$.

▷ On a $\ker(P \times Q)(u) \subset \ker P(u) + \ker Q(u)$ et si $x \in \ker(P \times Q)(u)$, alors :

$$x = \underbrace{(A(u) \circ P(u))(x)}_{\in \ker Q(u)} + \underbrace{(B(u) \circ Q(u))(x)}_{\in \ker P(u)}.$$

En effet, $Q(u)(P(u) \circ A(u)(x)) = (A(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$ et $P(u)(Q(u) \circ B(u)(x)) = (B(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) + \operatorname{Ker}(Q(u))$

Finalement on a montrer : $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

8. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$, P_1 et P_2 sont premiers entre eux,$Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$.

Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout donne l'existence deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots {P_m}^{k_m}$ et pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \ldots + R_mQ_m = 1$.

9. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots {P_m}^{k_m}$,pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$. $i \in \{1, 2, \dots, m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.

$\triangleright$ Il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \ldots + R_mQ_m = 1$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ donc

$$R_1(u) \circ Q_1(u) + \ldots + R_m(u) \circ Q_m(u) = id_E$$

par suite $\boxed{\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E}$.

$\triangleright$ Soit i, j des entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) \\ &= R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ Q_j(u) \\ &= (R_iR_j)(u) \circ (Q_iQ_j)(u) \end{aligned}$$

et $Q_iQ_j = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}} \dfrac{\pi_u}{P_j^{k_j}} = \pi_u . \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i} P_j^{k_j}}$, *car* $P_i^{k_i} P_j^{k_j}$ *divise* π_u , par suite π_u divise Q_iQ_j , il est donc annulateur de u d'où $p_i \circ p_j = 0$.

$\triangleright$ Soit i dans $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i &= p_i \circ id_E \\ &= p_i \circ \sum_{j=1}^{m} p_j \\ &= p_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} p_i \circ p_j \end{aligned}$$

or si $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$ donc $p_i^2 = p_i$, et p_i est un projecteur .

10. On a $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $N_i = \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$.
Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux , le théorème de décomposition des noyaux donne
$$\ker \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$$
d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_u(u) = 0$ donc $\ker \chi_u(u) = E$ d'où
$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$$

11. $\triangleright$ La somme $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ est directe :
Soit $(y_1, ..., y_m) \in \operatorname{Im} p_1 \times \ldots \times \operatorname{Im} p_m$ tels que $y_1 + ... + y_m = 0$, il existe $x_1, ..., x_m$ dans E verifiant $y_i = p_i(x_i)$ pour tout i dans $\{1, ..., m\}$. Soit i, j distinct dans $\{1, ..., m\}$ alors

$$p_i(y_j) = (p_i \circ p_j)(x_j) = 0 \text{ et } p_i(y_i) = (p_i \circ p_i)(x_i) = p_i(x_i) = y_i$$

ce qui donne

$$p_i(y_1) + ... + p_i(y_m) = y_i = 0$$

donc $(y_1, ..., y_m) = (0, ..., 0)$, ce qui prouve que la somme $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ est directe

$\triangleright$ $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$:

On a $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m \subset E$ et $p_1 + \ldots + p_m = id_E$ donc pour tout x dans E on a $x = p_1(x) + \ldots + p_m(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ par suite $E \subset \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$, d'où $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$.

Ainsi on a $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m$

12. D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a π_u divise $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et l'ensemble des racines de π_u est exactement le spectre de u , donc $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ avec $0 < \beta_i \leq \alpha_i$, on a alors $P_i^{k_i} = (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, a l'indice près .

Soit $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $y_i = p_i(x_i) \in \operatorname{Im} p_i$, puisque $P_i^{k_i}$ divise $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $P_i^{k_i}(p_i) = \pi_u(u) = 0$ alors $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}(p_i) = 0$, par suite $y_i \in N_i$ et $\operatorname{Im} p_i \subset N_i$.

D'autre part $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$ donc

$$\dim(\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\operatorname{Im} p_m) = \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $\operatorname{Im} p_i \neq N_i$ donc $\dim(\operatorname{Im} p_i) < \dim(N_i)$ par suite

$$\dim(\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\operatorname{Im} p_m) < \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

ce qui est absurde donc $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ on a $\dim(\operatorname{Im} p_i) = \dim(N_i)$ et $\operatorname{Im} p_i = N_i$.

Partie II

13. u est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, et l'ensemble de ses racines est exactement le spectre de u d'où :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$$

14. On a , pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

$\triangleright$ Avec un peut de détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ s'écrit :

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{X - \lambda_i}$$

avec $a_i = \left[\dfrac{P_i(X)}{\pi_u(X)}\right]_{X=\lambda_i} = \left[\dfrac{1}{Q_i(X)}\right]_{X=\lambda_i} = \theta_i$ donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$$

$\triangleright$ Cette relation donne

$$1=\sum_{i=1}^{m}\theta_i\frac{\pi_u}{X-\lambda_i}=\sum_{i=1}^{m}\theta_iQ_i$$

suivant les notation de Q10 on a pour tout entier $i\in\{1,2,\dots,m\}, p_i=\theta_iQ_i(u)=\dfrac{Q_i(u)}{Q_i\left(\lambda_i\right)}$.

15. On suppose que $\deg\pi_u>1$. On a $1=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\theta_i\frac{\pi_u}{X-\lambda_i}$ donc

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{m}\theta_i\frac{X-\lambda_i+\lambda_i}{X-\lambda_i}\pi_u \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i\right)\pi_u+\sum_{i=1}^{m}\theta_i\lambda_iQ_i(X) \end{aligned}$$

De la relation $\dfrac{1}{\pi_u}=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i}{X-\lambda_i}$ on a $\dfrac{x}{\pi_u(x)}=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\theta_i\frac{x}{x-\lambda_i}$ et on fait tendre x vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\theta_i=0$, d'où

$$X=\sum_{i=1}^{m}\theta_i\lambda_iQ_i(X)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_iQ_i(X)}{Q_i\left(\lambda_i\right)}\quad(*)$$

Par substitution de X par u on obtient

$$u=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{Q_i(u)}{Q_i\left(\lambda_i\right)}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ip_i.$$

Si $\deg\pi_u=1$: la relation $(*)$ n'a pas de sens, mais on a $\pi_u=X-\lambda_1$ et $u=\lambda_1.p_1$ avec $p_1=id_E$.

16. **Exemple :** on considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

(a) La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Et $A^2=4I_4$.

(b) On a $A^2=4I_4$ donc X^2-4 est annulateur de A et π_A divise X^2-4 , A n'est pas de la forme αI_4 donc forcement $\deg\pi_A\geq 2$ par suite $\pi_A=X^2-4$.

On a

$$\frac{1}{\pi_u}=\frac{\theta_1}{X-2}+\frac{\theta_2}{X+2}$$

avec $\theta_1=\left[\dfrac{X-2}{\pi_u(X)}\right]_{X=2}=\dfrac{1}{4}$ et $\theta_2=\left[\dfrac{X+2}{\pi_u(X)}\right]_{X=-2}=\dfrac{-1}{4}$, donc

$$\frac{1}{\pi_u}=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{X+2}+\frac{1}{X-2}\right)$$

et $Q_1=X-2$, $Q_2=X+2$.

Par suite $\Pi_1=\frac{Q_1(A)}{Q_1(-2)}=\frac{-1}{4}(A-2I_4)$ et $\Pi_2=\frac{Q_2(A)}{Q_2(2)}=\frac{1}{4}(A+2I_4)$.

On trouve

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(-A+2I_4) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{4}(A+2I_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) On a les relations :

- ▷ $A = \lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2$
- ▷ $\Pi_1.\Pi_2 = \Pi_2.\Pi_1 = 0$
- ▷ $\Pi_1^k = \Pi_1$, $\Pi_2^k = \Pi_2$ pour tout entier naturel k.

On btient pour tout entier naturel k $A^k = \lambda_1^k\Pi_1 + \lambda_2^k\Pi_2$, donc

$$A^k = 2^k\Pi_1 + (-2)^k\Pi_2 = 2^k\left(\Pi_1 + (-1)^k\Pi_2\right).$$

Ainsi pour tout entier naturel k on a

$$A^{2k} = 4^kI_4 \text{ et } A^{2k+1} = 4^kA$$

17. On a $\mathbb{C}[v] = \{P(v)\ , P \in \mathbb{C}[X]\}$, posons $\pi_v(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + .. + a_0$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ on effectue la division euclidienne de P par π_v :

$$P = Q\pi_v + R \text{ avec } \deg R \le d-1,$$

par substitution on a

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v),$$

donc $P(v) \in \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$ et $\mathbb{C}[v] \subset \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$. Par suite $\dim\mathbb{C}[v] \le d$.

Si on suppose que $\dim\mathbb{C}[v] \le d-1$ alors la famille $\left\{id_E, v, ..., v^{d-2}\right\}$ est liée ainsi il existe un polynôme annulateur de v de degré inferieur à $d-1$ ce qui contredit le fait que , π_v est annulateur de degré minimal égal à d .

Donc $\dim\mathbb{C}[v] = d$.

18. On a $\deg\pi_u = m = \dim\mathbb{C}[u]$.

La famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre :

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ dans $\mathbb{C}^m$ tels que $\alpha_1p_1 + \ldots + \alpha_mp_m = 0$, on compose par p_j , sachant que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \ne j$ et $p_i \circ p_i = p_i$, on obtient $\alpha_j = 0$, ainsi $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre.

$(p_1, \ldots, p_m)$ est libre de cardinal m donc c'est une base de $\mathbb{C}[u]$.

19. Si u non diagonalisable, *par axemple nilpotent non nul*, alors π_u n'est pas à racines simple et $\deg \pi_u > m$, donc la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ n'est pas génératrice et n'est pas une base de $\mathbb{C}[u]$.

20. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$.

    Donc pour tout polynôme P on a $P(u) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) f_i$, en particulier le polynôme $P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ est annulateur à racines simples , donc u est diagonalisable .