Complexes, somme, études de fonctions
DM 3

Exercice 1 (Des complexes + révision applications)

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{3z-i}{i+z}$.

1. a) Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $f(z) \neq 3$.
   b) Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de paramètre y :
   $$f(z) = y$$
   c) En déduire que f est bijective et déterminez $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$.
2. a) Déterminez l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $f(z) \in \mathbb{R}$. On pourra écrire que $z = x + iy$ avec x et y réel.
   b) Même question avec l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z)$ est un imaginaire pur.

---

1. a) Cherchons à résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, f(z) = 3$:
   $$\begin{aligned}\frac{3z-i}{i+z} = 3 &\iff 3z - i = 3(i+z)\\ &\iff -i = 3i \iff i = 0\end{aligned}$$
   L'équation n'a donc pas de solution, et donc pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, f(z) \neq 3$
   b) Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$, on cherche $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $f(z) = y$.
   Etant donné l'ensemble de définition de f, on cherche $z \neq -i$.
   $$\begin{aligned}\frac{3z-i}{i+z} = y &\iff 3z - i = y(i+z)\\ &\iff z(3-y) = iy + i\\ &\iff z = i\frac{y+1}{3-y}\end{aligned}$$
   Il reste juste à vérifier que $z \neq -i$ en procédant comme dans la question 1a) :
   $$i\frac{y+1}{3-y} = -i \iff iy + i = -3i + iy \iff i = 0$$
   c) On a tout fait ! Pour tout $y \in \mathbb{C}\setminus\{3\}$, on a trouvé un unique $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$ tel que $f(z) = y$.
   Ainsi f est bijective et
   $$f^{-1}(y) = i\frac{y+1}{3-y}$$
2. a) Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.
   Alors
   $$\begin{aligned}f(z) &= \frac{3(x+iy)-i}{i+(x+iy)} = \frac{3x+(3y-1)i}{x+(y+1)i}\\ &= \frac{(3x+(3y-1)i)(x-(y+1)i)}{x^2+(y+1)^2}\\ &= \frac{1}{x^2+(y+1)^2}\left(3x^2+(3y-1)(y+1)+i(3xy-x-3xy-3x)\right)\\ &= \frac{1}{x^2+(y+1)^2}\left(3x^2+3y^2+2y-1+i(-4x)\right)\end{aligned}$$
   Ainsi, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $-4x = 0$, c'est à dire $x = 0$.
   Les points recherchés sont donc la droite d'équation $x = 0$, autrement dit l'axe des ordonnées.
   b) Nettement plus dur si vous ne vous souvenez plus de l'équation d'un cercle :
   Le calcul précédent donne $f(z) \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $3x^2 + 3y^2 + 2y - 1 = 0$.
   Or
   $$\begin{aligned}3x^2+3y^2+2y-1 = 0 &\iff x^2+y^2+\frac{2}{3}y = \frac{1}{3}\\ &\iff x^2+(y+\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9} = \frac{1}{3}\\ &\iff (x-0)^2+(y-(-\frac{1}{3}))^2 = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

Ainsi, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie que $f(x+iy) \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $||AM||^2 = \frac{4}{9}$ où A est le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

C'est donc le cercle centré en A et de rayon $\frac{2}{3}$.

Exercice 2 (remake du DS)

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif est d'obtenir, sans utiliser de récurrence, la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. Utiliser un telescopage pour calculer $\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^4 - k^4))$.
2. Utiliser le binome de Newton à l'intérieur de la somme ci dessus pour obtenir un lien entre $(n+1)^4$, $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et n.
3. En déduire une formule pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$. On simplifiera au maximum l'expression.

---

1. On peut appliquer directement la formule de telescopage, ou décomposer en 2 somme et faire un glissement d'indice.

   On obtient $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4)) = (n+1)^4$
2. Par le binôme de Newton, on a
$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$
   Ainsi
$$(n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4)) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$
3. Il reste juste à tout calculer :
$$(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
   D'où
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n+1)((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n - 1\right) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)n^2(n+1) \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Exercice 3 (Trigonométrie hyperbolique)

1. a) Montrez que l'équation $2\,\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution (on ne cherchera pas la valeur exacte de a....)

   b) Justifiez que la fonction $u : x \mapsto \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\, x$ est dérivable et montrez que pour tout réel x, $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\, x \geq 0$
2. Soit $f : x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1$.

   a) Justifiez que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
3. Montrez que $1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$1 - x \leq \frac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}},$$
   puis que pour tout $x \in]0, 1[$,
$$1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$
5. Conclure que $\forall x \in]0, 1[$,
$$\ln(1+x) \leq \mathrm{sh}(x) \leq -\ln(1-x)$$

---

1. a) Soit $g : x \mapsto 2\,\mathrm{sh}(x)+1$.
g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = 2\mathrm{ch}(x) > 0$, donc g est strictement croissante.
Comme $\lim_{x\to-\infty} 2\,\mathrm{sh}(x)+1 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 2\,\mathrm{sh}(x)+1 = +\infty$ et que g est continue, on a $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Ainsi la fonction $g : x \mapsto 2\,\mathrm{sh}(x)+1$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans l'image de $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
L'équation $2\,\mathrm{sh}(x)+1 = 0$ admet donc une unique solution réelle.

b) La fonction u est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables, et on a

$$u'(x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(x)(2\,\mathrm{sh}(x)+1)$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$, $u'(x)$ est du signe de $2\,\mathrm{sh}(x)+1$, c'est à dire u décroissante sur $]-\infty, a]$, croissante sur $[a, +\infty[$
Elle a donc un minimum en a, et ce minimum vaut $u(a) = \mathrm{ch}(a)^2 + \mathrm{sh}(a)$.
Or $\mathrm{sh}(a) = -\frac{1}{2}$, et $\mathrm{ch}(a) \geq 1$ (1 est le minimum de ch), donc $\mathrm{ch}(a)^2 \geq 1$ et $u(a) \geq 1 - \frac{1}{2} > 0$.
On a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x) > 0}$

2. a) Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$,f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable deux fois (et même une infinité en fait...)
On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \mathrm{ch}(x)e^{\mathrm{sh}(x)} - 1 \text{ et } f''(x) = \mathrm{sh}(x)e^{\mathrm{sh}(x)} + \mathrm{ch}^2(x)e^{\mathrm{sh}(x)} = (\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}^2(x))e^{\mathrm{sh}(x)}$$

b) D'après la question 3*b* et comme $e^{\mathrm{sh}(x)} > 0$, on a $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi f' est strictement croissante.
Or $f'(0) = 1e^0 - 1 = 0$, donc $f'(x) < 0$ pour $x < 0$, et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$, puis croissante sur $[0, +\infty[$.

3. D'après l'étude précédente, f admet un minimum en 0 et on trouve $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, c'est à dire $e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1 \geq 0$.
En ajoutant $x+1$ on a bien

$$\boxed{1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)}}$$

4. L'inégalité précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ aussi.
Donc

$$1 - x \leq e^{\mathrm{sh}(-x)}$$

Comme $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$ et $e^{-\mathrm{sh}(x)} = \frac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}}$, on en déduit

$$1 - x \leq \frac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}}$$

Enfin, pour tout $x \in]0, 1[$, $1 - x > 0$ et $\frac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}} > 0$ également : on peut appliquer l'inverse qui est décroissant sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{\frac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}}} \qquad \text{donc } e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

En combinant l'inégalité obtenue en 5 avec celle ci, on a donc

$$\boxed{1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}}$$

5. Pour tout $x \in]0, 1[$, $1 + x > 0$, tout comme $e^{\mathrm{sh}(x)}$ et $\frac{1}{1-x}$: on va pouvoir appliquer la fonction ln a l'inégalité précédente. Comme cette fonction est croissante, on obtient

$$\boxed{\ln(1+x) \leq \mathrm{sh}(x) \leq -\ln(1-x)}$$

Exercice 4 (Trigonométrie réciproque et calcul de dérivées)
Soient les fonctions u et f définie par

$$u : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ et } f : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de u, justifiez qu'elle est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée. On simplifiera au maximum l'expression obtenue.
2. Déterminez l'ensemble de définition de f et justifiez qu'elle est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$.
3. Calculez f' et en déduire une expression plus simple de f.

---

1. Notons D_u l'ensemble de définition de u. $x \in D_u \iff x \neq -1$ et $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$
   Un tableau de signe donne alors $x \in]-1,1]$, qui est donc l'ensemble de définition de u.
   De plus, u est dérivable sur $]-1,1[$ par composition de fonctions dérivables (le 1 est exclu a priori puisque la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0).
   On a alors, pour tout $x \in]-1,1[$:
   $$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{-1-x-(1-x)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}(1+x)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \times \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$
2. la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur le même ensemble que u, c'est à dire sur $]-1,1]$.
   Elle est dérivable sur $]-1,1[$ par composition de fonctions dérivables.
3. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1+x}{1+x+1-x} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$
   On reconnait $\dfrac{1}{2}\arccos'(x)$!
   Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]-1,1]$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos(x) + k$
   Or $f(0) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ d'une part,
   et $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$, donc on a $f(0) = \dfrac{\pi}{4} + k$ d'autre part.
   On en déduit que $k = 0$ et donc que
   $$f : x \mapsto \frac{1}{2}\arccos(x)$$