Corrigé du devoir surveillé n ° 4

Problème I. Stabilisateur d'image. CCINP 2021 Partie V

V.1 Étude d'un oscillateur mécanique

22. En appliquant le principe fondamental de la statique dans le référentiel ici galiléen on établit facilement $x_{eq} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$.

23. (a) La boîte étant en translation rectiligne non uniforme par rapport à un référentiel galiléen, elle ne constitue pas un référentiel galiléen.
    (b) On rajoute la force d'inertie d'entraînement dans le bilan des actions pour obtenir par application du principle fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen : $m\ddot{x} = mg - \alpha\dot{x} - ma - k\left(x - \ell_0\right)$.

24. L'équation précédente se réécrit $\ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = -a + g + \dfrac{k}{m}\ell_0 = -a + \dfrac{k}{m}x_{eq}$. En introduisant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{km}$, on obtient $\ddot{x}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x = -a(t)+\omega_0^2 x_{eq} = f(t)$, ce qui est la forme voulue.
    $X(t) = x(t) - x_{eq}$ satisfait clairement l'équation différentielle $\ddot{X} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a(t)$.
    En utilisant la notation complexe il vient directement $\underline{X} = \dfrac{-A_m}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + \dfrac{j\omega_0\omega}{Q}}$.
    Le passage au module en supposant $A_m > 0$ donne bien $X_m = |\underline{X}| = \dfrac{A_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$,
    (il y avait une faute de frappe évidente dans l'énoncé).

25.
    (a) Si on se place dans un domaine $\omega \ll \omega_0$, il vient $X_m \simeq \dfrac{A_m}{\omega_0^2}$ et on peut remarquer que la phase vaut π.
    (b) Dès lors $X(t) = -\dfrac{a(t)}{\omega_0^2}$.

26. La fréquence propre $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 8.10^2$ Hz. On voit que les fréquences correspondant aux mouvements sont bien très inférieures à f_0. La condition attendue est satisfaite.

V.2 Étude d'un condensateur plan

27.
    (a) Cf. cours (invariance et symétrie) pour montrer que $\overrightarrow{E} = E(x)\overrightarrow{e}_x$.
    (b) Cf. cours pour montrer que $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_x$ pour $x > 0$ et $\overrightarrow{E} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_x$ pour $x < 0$.

28.
    (a) Par superposition il vient $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_x$ entre les armatures.
    Le champ est nul à l'extérieur du condensateur.
    (b) Par circulation entre A et B il vient $U_{AB} = e\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

29.

(a) La capacité C est le coefficient de proportionnalité entre la charge (positive) d'une armature et la différence de potentiel (positive également) existant entre les deux armatures, soit $Q = CU$. Ici on a $\sigma = \dfrac{Q}{S}$. D'après une question antérieure $U = e\dfrac{Q}{S\varepsilon_0}$. Par identification il vient $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$.

(b) La capacité d'un condensateur s'exprime en farad (symbole F).

V.3 Application à la mesure d'une accélération

30. Il me semble indispensable de faire un schéma, car la description de l'énoncé laisse la possibilité de mettre l'amature fixe au dessus ou au dessous de la plaque mobile... Je choisis dans ce corrigé de la mettre dessous.
Dès lors la distance entre les deux armatures est $e - (x - x_{eq}) = e - X$. La capacité est alors $C = \varepsilon\dfrac{S}{e-X}$. Si la charge Q est fixée (ce n'est sûrement pas ce qu'il y a de plus facile à faire), la tension est $U = \dfrac{Q}{C} = Q\dfrac{e - X(t)}{\varepsilon_0 S}$. On accède ainsi facilement à $X(t)$ par une mesure de tension, et d'après une question antérieure à l'accélération $a(t)$.
Si on place la plaque immobile au dessus de la plaque mobile, il vient $U = \dfrac{Q}{C} = Q\dfrac{e + X(t)}{\varepsilon_0 S}$.

Exercice II Mines-Ponts MP Physique 2021

1. C'est une question élémentaire de modélisation. Il ne faut pas se contenter de donner une valeur au doigt mouillé sans justification... On propose de modéliser les araignées comme des gouttes d'eau de rayon r compris entre 1 mm et 3,5 mm, d'où une masse $m = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \times \rho_e$ comprise entre 4,2 mg et 1,8g.
2. On a ici un condensateur dont la surface de la Terre est une des armatures, ici celle qui porte les charges négatives. D'après le cours $\sigma = \varepsilon_0 E = 1.10^{-9}$ C·m^{-2}.
La différence de potentiel qui devrait exister devrait alors être $z_0 E = 7{,}2$ MV soit 20 fois plus que ce qui est mesuré. Le modèle est donc fortement criticable.
3. Comme toutes les charges jouent le même rôle on va calculer le potentiel créé par les charges indicées de 2 à $2n$ là où se trouve la charge 1.
Un calcul géométrique montre que la distance entre la charge d'indice j et la charge d'indice 1 est $2L\sin\alpha\sin\left((j-1)\dfrac{\pi}{2n}\right)$.
Dès lors
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2L\sin\alpha}\sum_{j=2}^{2n}\frac{1}{\sin\left((j-1)\dfrac{\pi}{2n}\right)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2L\sin\alpha}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)}$$
Dans la somme on peut remarquer que par symétrie la somme des termes d'indices 1 à $n-1$ est la même que la somme des termes d'indices $n+1$ à $2n-1$, et que pour $k = n$ le sinus vaut 1. On peut donc bien écrire
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2L\sin\alpha}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)}\right)$$
ce qui est la forme attendue avec $p = 8$.

L'énergie totale s'obtient à partir de l'énergie de chaque charge. On pourrait penser à écrire $2nqV$ car toutes les charges jouent le même rôle. En fait en faisant ainsi on compte deux fois l'interaction entre chaque paire de charges. Mais cette subtilité et la formule correspondante est hors programme (j'ai compté juste les deux possibilités).

La bonne réponse est $\mathcal{E}_p = nqV$.

La situation d'équilibre correspond à un minimum d'énergie potentiel qui est clairement obtenu pour $\alpha = \pi/2$: les charges sont alors dans un même plan horizontal, les plus éloignées les unes des autres, ce qui est logique.

4. Comme on a déjà calculé l'énegie potentielle on a intérêt à calculer l'énergie cinétique du système et à traduire la conservation de l'énergie mécanique. Chaque fil a une énergie cinétique égale à $\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\alpha}\right)^2$, soit au total $2n \times \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\alpha}\right)^2 = nm\frac{L^2}{4}\dot{\alpha}^2$.

   Le système étant conservatif, l'énergie mécanique $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ est une constante. On a donc $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{dt}} = 0$, ce qui se traduit après élimination de la solution dégénérée $\dot{\alpha} = 0$, par $nm\frac{L^2}{2}\ddot{\alpha} - \frac{nq^2}{8\pi\varepsilon_0 L\sin\alpha^2}G(n)\cos\alpha = 0$.

   On retrouve au passage que la position d'équilibre correspond à $\alpha = \pi/2$...

   La nature répuslive des interactions entre les charges indique très clairement que la position d'équilibre est stable. On peut le vérifier par le calcul en faisant en développant de cos au voisinage de $\pi/2$. Posons $\alpha = \pi/2 + \xi$. $\cos(\alpha) = \cos(\pi/2 + \xi) = -\sin\xi \simeq -\xi$ pour $\xi \ll 1$ rad/s. L'équation précédente s'écrit alors $m\frac{L^2}{2}\ddot{\xi} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 L}G(n)\xi = 0$ au premier ordre en ξ. Dès lors comme c'est l'équation d'un oscillateur harmonique la position d'équilibre est bien stable.

   Et on établit facilement la période $T = 2\pi\sqrt{\frac{4m\pi\varepsilon_0 L^3}{q^2 G(n)}}$.

5. Le champ électrique extérieur s'écrit $\overrightarrow{E} = -E_0\overrightarrow{e}_z$. Il dérive du potentiel $V_0 = E_0 z$. Pour les $2n$ charges q à l'altitude $L\cos\alpha$, il faut donc rajouter une énergie $2nqE_0L\cos\alpha$.

   Pour déterminer la position d'équilibre il faut annuler la dérivée $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{p,tot}}}{\mathrm{d}\alpha}$, où $\mathcal{E}_{p,\mathrm{tot}}$ désigne l'énergie potentielle totale, soit $-\frac{nq^2}{8\pi\varepsilon_0 L\sin\alpha^2}G(n)\cos\alpha - 2nqE_0L\sin\alpha = 0$.

   L'angle d'équilibre est évidemment une fonction croissante de q et n et décroissante de L et E_0.

   L'application numérique donne $q = -1{,}05$ nC (Normalement calcul à réaliser à la main...).

6. On prend le système araignée + fils. Il ne faut prendre en compte que les forces extérieures, à savoir le poids (celui de l'araignée de masse m seulement en négligeant le poids des fils) et les forces électrique du champ E_0 sur les $N = 2n$ charges. À la limite du décollement on aura donc $-NqE_0 = mg$, soit $N = -\frac{mg}{qE_0} = 343$! ! Ce calcul laisse penser que cette seule force n'est pas suffisante. L'énoncé évoque quelques dizaines de fils... ce qui ne serait pas suffisant.

Exercice III : Alimentation électrique. CCINP PSI 2019 Physique 1

Composition de l'atome de plomb

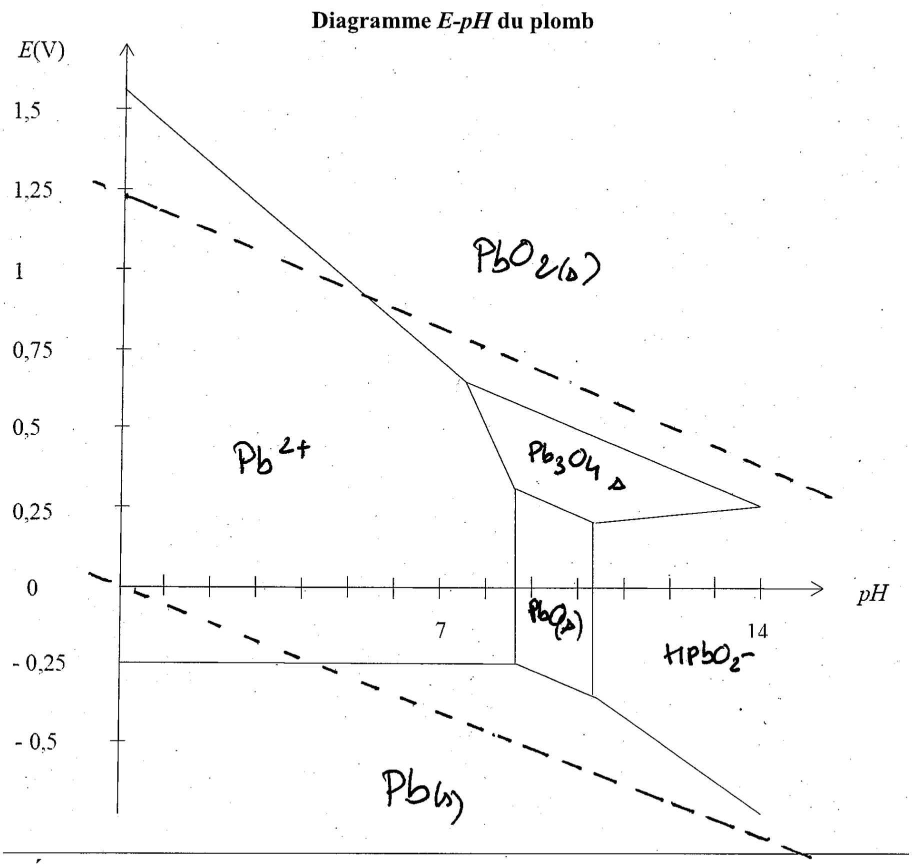
7. Un atome de plomb contient 207 nucléons, dont 82 protons et donc 125 neutrons.

Diagramme potentiel-pH du plomb

8. Dans Pb^{2+}, PbO et $HPbO_2^-$ le plomb est au degré d'oxydation +II, dans PbO_2 et est à +IV, dans Pb au degré 0 et dans Pb_3O_4 à VIII/III.

   On classe les espèces par degré d'oxydation croissant du bas vers le haut, et par caractère basique croissant, pour un même degré d'oxydation, de la gauche vers la droite.

   On obtient alors le diagramme complété suivant :



   Dans Pb_3O_4 il y a effectivement apparement violation de la quantifiation de la charge. En fait ce n'est pas le cas, car on a calcule le nombre d'oxydation moyen. En fait il y a deux atomes de plomb au degré d'oxydation +III et un à +II.

9. Les couples de l'eau sont O_2/H_2O de demi équation rédox de réduction $O_2 + 4\,e^- + 4\,H_3O^+ \longrightarrow 6\,H_2O$ et H_2O/H_2 de demi équation de réduction $2\,H_3O^+ + 2\,e^- \longrightarrow H_2 + 2\,H_2O$.

   Pour la première la formule de Nernst donne en prenant les pressions partielles égales à 1 bar $E = 1,23 - 0,06pH$ et pour la deuxième $E = 0,00 - 0,06pH$.

10. La superposition demandée apparaît sur le diagramme. On y voit qu'en milieu acide le plomb n'est pas stable (domaine disjoint de celui de l'eau), alors qu'il est stable en milieu basique.

    Dans le premier cas on a oxydation du plomb en Pb^{2+} selon $Pb + 2\,H_3O^+ \longrightarrow Pb^{2+} + H_2 + 2\,H_2O$.

11. L'équilibre de mise en solution du sulfate de plomb est $PbSO_4 \longrightarrow Pb^{2+} + SO_4^{\ 2-}$. À l'équilibre, $K_s = [Pb^{2+}][SO_4^{\ 2-}]$. Vu la faible valeur de K_s, on peut faire l'hypothèse que la solubilité s est faible devant la concentration en acide sulfurique, de sorte que $[SO_4^{\ 2-}] \simeq 0{,}5$ mol/L. On a alors, $s = [Pb^{2+}] = \frac{K_s}{[SO_4^{\ 2-}]} = 3{,}2.10^{-8}$ mol/L

    Le résultat est cohérent avec l'hypothèse faite plus haut.

Accumulateur au plomb en fonctionnement générateur

12. À la cathode on trouve la réduction de PbO_2 en $PbSO_4$ selon $PbO_2 + 2\,e^- + 4\,H_3O^+ + {SO_4}^{2-} \longrightarrow PbSO_4 + 6\,H_2O$. C'est le pole positif de la pile représentée.
À l'anode il y a oxydation de Pb en $PbSO_4$ selon $Pb + {SO_4}^{2-} \longrightarrow PbSO_4 + 2\,e^-$.
L'équation bilan est alors $PbO_2 + Pb + 4\,H_3O^+ + 2\,{SO_4}^{2-} + \longrightarrow 2\,PbSO_4 + 6\,H_2O$
13. La force électromotrice est $e = E^0_{PbO_2/PbSO_4} + 0,03\log[H_3O^+]^4[{SO_4}^{2-}] - E^0_{PbSO_4/Pb} - 0,03\log\frac{1}{[{SO_4}^{2-}]}$, ce qui montre qu'elle dépend effectivement du pH, et qu'on à intérêt à prendre la plus grande concentration en ions H_3O^+ possible, soit en milieu très acide.

Exercice IV QCM Électrostatique

V.4 Troisième partie

19. Réponse A. Par étude des symétries le champ est nul.
20. Réponse C. Chaque charge est à la distance $\sqrt{2}a$ de O et crée un potentiel $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{2}a}$. Par superposition $V(0) = \dfrac{q}{\pi\varepsilon\sqrt{2}a}$.
21. Réponse C. L'étude des symétrie montre que le champ est nécessairement porté par $-\overrightarrow{e}_x$. On somme la projection des 4 projections selon Ox (avec $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ des champs de normes $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{2}a\right)^2}$.
22. Réponse A. Deux charges symétriques par rapport à O créent des potentiels opposés d'où au total un potentiel nul.
23. Réponse A. Par symétrie le champ est nul (il y a trois plans de symétries différents de la distribution qui contiennent O !)
24. Réponse A. Même argument qu'en Q22.
25. Réponse D. À savoir..
26. Réponse B. Idem...

V.5 Quatrième Partie

28. Réponses A et C.
29. Réponse B. Calcul du cours...
30. Réponse C. Calcul du cours...
31. Réponse A.
32. Réponse C.

Exercice V : Circuits logiques combinatoires

V.6 Décodeur

1. On dresse (plus ou moins facilement...) la table de vérité suivante :

b_1	b_0	s_3	s_2	s_1	s_0
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

2. Ce circuit décode donc le nombre binaire b_1b_0 (de deux bits) et met une des 4 sorties à 1 suivant le décodage (00 qui est l'écriture binaire de 0 met s_0 au niveau haut, 01 qui est l'écriture binaire de 1 met s_1 au niveau haut, etc) ?

V.7 Générateur de Parité

1. Courageusement on établit la table de vérité suivante :

A	B	C	D	P
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1