Analyse - Chapitre 04

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Les équations différentielles sont des équations fonctionnelles, c'est à dire des équations où l'inconnue n'est plus un nombre réel ou complexe, mais une fonction. Le terme "différentielle" signifie que l'équation utilise la dérivation. L'ordre de l'équation différentielle est le nombre de fois où la fonction est dérivée.
Par habitude, on note y l'inconnue des équations différentielles, mais c'est en réalité une fonction...

I Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

1) Généralités.

a) Type d'équations à résoudre :

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** et d'inconnue y toute équation de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + ay(x) = b$$

où a et b sont des réels fixés.
L'inconnue y est une fonction qui doit être dérivable sur $\mathbb{R}$.
⚠ : en général, on ne précise pas que y est une fonction de x et on écrit simplement :

$$y' + ay = b$$

Cela donne des écritures plus compactes, mais qui peuvent être ambigües...surtout quand plus tard a et b seront à leur tour des fonctions !
Exemples :

- $3y' + 2y = 2$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants (il suffit de diviser par 3 pour revenir à la forme ci dessus).
- $yy' = 1$ n'est pas une équation différentielle linéaire.

Equation homogène :
Si $b = 0$, l'équation est alors de la forme $y' + ay = 0$ et on dit qu'elle est homogène.
Par exemple : $y' + 2y = 0$ est homogène et $y' + 2y - 1 = 0$ ne l'est pas...

b) Espace des solutions :

Theorème 1 :
Soient a et b réels et soit (E) une équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y' + ay = b.$$

On note (E_h) l'équation homogène associée :

$$(E_h) \qquad y' + ay = 0.$$

Soit y_p une solution (quelconque) de E.
Alors une fonction y est solution de (E) si et seulement si il existe y_h solution de (E_h) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Autrement dit :
Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions qui s'écrivent comme somme d'une solution particulière (y_p) et d'une solution de l'équation homogène.

▷ *Preuve* :

◁

c) Plan de résolution :

Le théorème précédent nous fournit le plan de résolution :

Plan de résolution d'une equation différentielle linéaire du 1er ordre :

1 : Mettre l'équation sous la forme $y' + ay = b$.

2 : Trouver toutes les solutions de l'équation homogène.

3 : Trouver une solution particulière.

4 : Conclure en faisant la somme.

2) Détails des étapes.

a) Résolution de l'équation homogène :

Theorème 2 :

Les solutions de l'équation homogène $E_h : y' + ay = 0$ sont les fonctions

$$y : x \mapsto \lambda e^{-ax}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

1. (E_1) $y' - 2y = 0$: l'équation est sous la bonne forme, avec $a = -2$. Ainsi
$$(E_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/y : x \mapsto \lambda e^{2x}$$
2. (E_2) $3y + 2y' = 0$:

b) Recherche de solutions particulières :

Pour les équations du type $y'+ay = b$ avec a et b constants, on cherchera une solution particulière qui est elle même constante.

Exemple :
$$y' - 2y = 3 \qquad (E)$$
On cherche une solution constante en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = c$.
Alors $y_p'(x) = 0$ et quand on remplace dans (E), on obtient y_p solution si et seulement si
$$0 - 2c = 3 \Leftrightarrow c = -\frac{3}{2}$$
.
Les solutions de l'équation homogène étant $y(x) = \lambda e^{2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient que l'ensemble des fonctions solutions de (E) sont les fonctions pour lesquelles
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \mapsto \lambda e^{2x} - \frac{3}{2}$$

Méthode : ET SI LE SECOND MEMBRE N'EST PAS CONSTANT ?

On verra dans quelques semaines comment traiter n'importe quel second membre, mais quand celui ci est une fonction "simple", l'astuce consiste à chercher une solution particulière "du même type" que le second membre.
Ainsi :

- si $y' + ay = P(x)$ où P est polynomiale, on cherche des solutions sous la forme d'un polynôme Q de même degré que P.
- Si $y' + ay = P(x)e^{mx}$ avec $m \in \mathbb{R}$ et P un polynôme, on cherche y_p sous la forme
$$\begin{cases} \text{si } m \neq -a, & y_p(x) = Q(x)e^{mx} \text{ avec } deg(Q) = deg(P) \\ \text{si } m = -a, & y_p(x) = xQ(x)e^{mx} \text{ avec } deg(Q) = deg(P) \end{cases}$$
- $y' + ay = \cos(mx)$ ou $\sin(mx)$: on cherche les solutions sous la forme $y_p(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx)$ avec A et B réels.

Exemples :

1. $$y' - 2y = 3x^2 + x$$

2.

$$y' + 4y = \sin(x)$$

3) Problème de Cauchy

Définition :

On appelle problème de Cauchy toute équation différentielle associée à une "condition initiale", c'est à dire une valeur particulière de la fonction inconnue en un point donnée.

Exemple :

On cherche à résoudre $\left\{ \begin{array}{r} y' - 3y = 2 \\ y(0) = 3 \end{array} \right.$

Ceci est un problème de Cauchy, avec la condition initiale $y(0) = 3$.

Theorème 3 :

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution f au problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{rl} y' + ay & = b \\ y(x_0) & = y_0 \end{array} \right.$$

▷ *Preuve* : La preuve se déduit immédiatement de l'allure des fonctions, toutes de la forme $\lambda e^{-ax} + c$. En remplaçant x par x_0 on obtient une équation simple qui donne un unique λ possible.

◁

Exemple :

Résolvons $\left\{ \begin{array}{r} y' - 3y = 2 \\ y(0) = 3 \end{array} \right.$

II Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1) Généralités

a) Problématique

On cherche à résoudre des équations du type :

$$(E) : y'' + ay' + by = c$$

où a, b et c sont des constantes réelles.
Le vocabulaire utilisé est le même que celui des équations du premier ordre. En particulier, on dit que l'équation est homogène si $c = 0$.

b) Plan de résolution

De la même façon que pour le premier degré, on peut montrer que les solutions s'écrivent comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.
Le plan de résolution sera donc le même que pour les équations du premier ordre :

Plan de résolution d'une equation différentielle linéaire du 2e ordre :

1 : Mettre l'équation sous la forme : $y'' + ay' + by = c$.

2 : Trouver les solutions de l'équation homogène.

3 : Trouver une solution particulière.

4 : Conclure sur les solutions de l'équation de départ.

2) Résolution de l'équation homogène : $y'' + ay' + by = 0$

a) Principe :

Soit y soit une solution de l'équation, c'est à dire que y est dérivable deux fois et vérifie

$$(E) : y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

L'astuce consiste à se ramener aux équations différentielles du premier degré : soit $r \in \mathbb{C}$ (pour l'instant quelconque), et écrivons :

$$y(x) = \lambda(x)e^{rx} \text{ avec } \lambda(x) = \frac{y(x)}{e^{rx}}$$

La fonction λ est dérivable deux fois (par quotient de fonctions dérivables), et il vient :

$$y'(x) = \lambda'(x)e^{rx} + r\lambda(x)e^{rx}$$

D'où :

$$\begin{aligned} y''(x) &= \lambda''(x)e^{rx} + r\lambda'(x)e^{rx} + r\lambda' e^{rx} + r^2\lambda(x)e^{rx} \\ &= e^{rx}(\lambda'' + 2r\lambda' + r^2\lambda^2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution } &\Leftrightarrow y'' + ay' + by = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{rx}(\lambda'' + 2r\lambda' + r^2\lambda) + ae^{rx}(\lambda' + r\lambda) + be^{rx}\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{rx}(\lambda'' + \lambda'(2r + a) + \lambda(r^2 + ar + b)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda'' + \lambda'(2r + a) + \lambda(r^2 + ar + b) = 0 \end{aligned}$$

La suite consiste à bien choisir le nombre r....

Définition :

On appelle équation caractéristique associée à l'équation $y'' + ay' + by = 0$ l'équation

$$r^2 + ar + b = 0$$

b) Premier cas : l'équation caractéristique a deux solutions réelles r_1 et r_2

Les deux solutions sont $r_1 = \dfrac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$.
Prenons $r = r_1$, donc $y(x) = \lambda(x)e^{r_1 x}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} y \text{ est solution } &\Leftrightarrow \lambda'' + \lambda'(2r_1+a) + \lambda(\underbrace{r_1^2+ar_1+b}_{=0}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda'' + \lambda'(\underbrace{2r_1+a}_{=\sqrt{\Delta}}) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, λ' est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 suivante

$$(E') : y' + (2r_1+a)y = 0$$

On résout cette équation :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution } de(E) &\Leftrightarrow \lambda' \text{ est solution de } (E') \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \lambda'(x) = Ce^{-\sqrt{\Delta}x} \\ &\Leftrightarrow \exists (C,D) \in \mathbb{R}^2 / \lambda(x) = \underbrace{-\frac{C}{\sqrt{\Delta}}}_{=B} e^{-\sqrt{\Delta}x} + \underbrace{D}_{=A} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / y(x) = Be^{(-\sqrt{\Delta}+r_1)x} + Ae^{r_1 x} \end{aligned}$$

Or $r_1 - \sqrt{\Delta} = \dfrac{-a+\sqrt{\Delta}}{2} - \sqrt{\Delta} = \dfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2} = r_2$
Conclusion :

$$\boxed{y \text{ est solution } \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R} / y : x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$$

c) Second cas : une racine double

Le calcul est identique, sauf que cette fois $\sqrt{\Delta} = 0$ et cela donne, en notant r cette racine double, :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution } &\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R} / \lambda'(x) = A \\ &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \lambda(x) = Ax + B \\ &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R} / y(x) = (Ax+B)e^{rx} \end{aligned}$$

d) Dernier cas : deux racines complexes

Ce cas est nettement plus technique. On se présente ici que les grandes lignes.
On rappelle déjà les définitions suivantes, qui sont précisées dans les chapitres sur les complexes :

Définition :

pour tout $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = e^{\alpha}e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$

Propriété 1 :

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la fonction $\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{zx} \end{array}$ est dérivable de dérivée $x \mapsto ze^{zx}$

Avec ces outils, on fait le même calcul que pour les racines réelles, et on a :

$$y \text{ est solution } \Leftrightarrow \exists C, D \in \mathbb{C}, y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

avec $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique (qu'on calcule avec le discriminant...)
Comme les solutions cherchées doivent être des fonctions à valeurs réelles, on a $\bar{y} = y$ et on peut montrer que $C = \bar{D}$ (c'est un système à résoudre un peu long...)
A nouveau en regroupant astucieusement on arrive à

$$\boxed{y \text{ est solution } \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R} / y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))}$$

3) Bilan :

a) Solutions de l'équation homogène :

Le théorème ci dessous sera utilisé directement, sans avoir à refaire tout le raisonnement de la section précédente.

Theorème 4 :

Soit $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$ à résoudre sur $\mathbb{R}$.
Soit (E_c) l'équation caractéristique associée :

$$(E_c) : r^2 + ar + b = 0$$

Les solutions de l'équation (E_h) dépendent des solutions de (E_c) :

— **Si E_c admet deux racines réelles r_1 et r_2 :**
y est solution de (E_h) si et seulement si

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

— **Si E_c admet une racine double r :**
y est solution de (E_h) si et seulement si

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (Ax + B)e^{rx}$$

— **Si E_c admet deux racines complexes conjuguées de forme algébrique $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$:**
y est solution de (E_h) si et seulement si

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right)$$

b) Solution particulière :

Comme pour le premier degré, on cherchera une **solution particulière constante si le second membre est constant**, du "meme type" que le second membre si celui-ci est une fonction. Ainsi :

Méthode : SECOND MEMBRE NON CONSTANT : SECOND DEGRÉ

- si $y'' + ay' + by = P(x)$ où P est polynomiale, on cherche des solutions sous la forme d'un polynôme Q de même degré que P.
- $y'' + ay' + by = \cos(mx)$ (ou $\sin(mx)$) : on cherche les solutions sous la forme $y_p(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx)$ avec A et B réels.
- Si $y'' + ay' + by = P(x)e^{mx}$ avec $m \in \mathbb{R}$ et P un polynôme, on cherche y_p sous la forme

$$\begin{cases} \text{si } m \text{ n'est pas racine de } E_c, & y_p(x) = Q(x)e^{mx} \text{ avec } deg(Q) = deg(P) \\ \text{si } m \text{ est racine simple de } E_c, & y_p(x) = xQ(x)e^{mx} \text{ avec } deg(Q) = deg(P) \\ \text{si } m \text{ est racine double de } E_c, & y_p(x) = x^2Q(x)e^{mx} \text{ avec } deg(Q) = deg(P) \end{cases}$$

Exemples :

1. Considérons l'équation :

$$(E_1) \quad y'' - y' - 2y = 3$$

2. Considérons maintenant le problème de Cauchy ci dessous :

$$(E_2) \quad y'' - 2y' + 2y = 2 \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1$$

Remarque : dans ce problème de Cauchy, on a cette fois deux conditions initiales. Elles correspondent en physique, à la donnée de position initiale ($y(0)$) et de la vitesse initiale ($y'(0)$).