Chapitre 6 : Nombres complexes - Partie 2
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$$x = 2 - 2i \qquad y = 1 + i\sqrt{3} \qquad z = 3 + i\sqrt{3} \quad t = -1 + i\sqrt{3}$$

$$u = \left(-1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 \quad v = (\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))^5 \quad w = \frac{1+i}{1-i} \quad \lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

Exercice 2 :

Donner une forme exponentielle des complexes suivants (θ est un réel) :

$$\begin{aligned} z &= 4\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right). \\ u &= 1 + e^{4i\theta} \\ v &= (1 + i\tan(\theta))^2 \\ a &= \frac{(1+i\sqrt{3})(\sin\theta + i\cos\theta)}{2(1-i)(\cos\theta - i\sin\theta)} \end{aligned}$$

$$b = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}$$

$$c = \frac{9\sqrt{3} + 3i}{2 + i\sqrt{3}}$$

Exercice 3 :

Soit $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

1. Ecrire j sous forme exponentielle. Montrez que $\bar{j} = j^2$.
2. Résoudre l'équation $z^3 = 1$
3. Déterminez les solutions de l'équation $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

Exercice 4 :

Soit $x = 1 + i$ et $y = \sqrt{3} - i$. Déterminer la forme trigonométrique de x et y, puis celle de xy. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 5 :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ l'équation (E_t) : $z^2 - 2tz + 1 = 0$.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe. Déterminer l'ensemble des points M_t d'affixe z tel que z est solution de E_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Ecrire sous forme algébrique le complexe $(1 - i\sqrt{3})^{10}$.

Exercice 7 :

1. Ecrire les expressions suivantes en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ (pour $t \in \mathbb{R}$) :
   (a) $\sin(4t)$ (b) $\cos(5t)$
2. Ecrire les expressions suivantes en fonction de combinaison linéaires de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ (pour $x \in \mathbb{R}$) :
   (a) $\cos^3(x)$ (b) $\cos^4(x)sin(x)$

Exercice 8 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En considérant $C_n + iS_n$, déterminez les valeurs de C_n et S_n définis par :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Exercice 9 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,

$$z^5 = \frac{1+i}{1-i}.$$

Exercice 10 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $e^z = 1 + i$.

Exercice 11 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $(z+1)^2 = i + \sqrt{3}$.

Exercice 12 :

On considère trois points du plan A, B et C, et on note a, b et c les affixes complexes correspondantes.

1. Interpréter géométriquement l'égalité $(|a-b|-|a-c|)\,(|b-a|-|b-c|)\,(|c-a|-|c-b|) = 0$. A quelle condition sur A, B et C est elle vérifiée ?
2. Interpréter géométriquement l'égalité $(|a-b|-|a-c|)^2 + (|b-a|-|b-c|)^2 = 0$. A quelle condition sur A, B et C est elle vérifiée ?

Exercice 13 :

A quelle condition sur z les points d'affixe 0, z et z^3 sont-il alignés ?

Exercice 14 :

Résoudre les équations suivantes géométriquement

1. $|z+i| = 3$.
2. $|z-1| = |z-i|$.
3. $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$.

Exercice 15 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixe z, z^2 et $z+i$ est rectangle en M.