Exercice 1 : très proche du TD et DM

1. Montrez que pour tout $x \in [0,1]$,
$$\arccos(2x^2-1) = 2\arccos(x)$$
2. (a) Déterminez les racines complexes de $-3-4i$.
   (b) On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^3-(5+3i)z^2+(7+16i)z+3-21i=0$$
   On peut vérifier que $z=3i$ est une solution. Déterminez les deux autres solutions de cette équation.
3. Soit $\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C}; |z|=1\}$ et soit $z \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pure.

---

1. Première façon : on pose $\theta = \arccos(x)$ pour $x \in [0,1]$. Ainsi $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$
Ainsi $2x^2-1 = 2\cos^2(\theta)-1 = \cos(2\theta)$.
Or $\theta \in [0, 2\pi]$ donc $2\theta \in [0;\pi]$ et ainsi $\arccos(\cos(2\theta)) = 2\theta$.
Finalement, on a donc $\arccos(2x^2-1) = 2\theta$, c'est à dire
$$\arccos(2x^2-1) = 2\arccos(x)$$
Deuxième façon : soit $f : x \mapsto \arccos(2x^2-1)$, que l'on définie sur $[0,1]$.
Alors par composition de fonction dérivable f est dérivable sur $]0,1[$ avec
$$f'(x) = \frac{-4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \frac{-4x}{\sqrt{-4x^4+4x^2}} = \frac{-4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}$$
Or $x \in]0,1[$, donc $x>0$ et ainsi $\sqrt{4x^2} = 2|x| = 2x$
finalement, pour tout $x \in]0,1[$,
$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$$
ainsi $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 2\arccos(x)+C$
Comme $f(1) = \arccos(1) = 0 = 2\arccos(1)+C$, on en déduit $C=0$ et finalement
$$\arccos(2x^2-1) = 2\arccos(x)$$
2. (a) On cherche $z = x+iy$ tel que $z^2 = -3-4i$. Alors $x^2-y^2 = -3$ (1) et $2xy = -4$ (2).
De plus, $|z|^2 = |-3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$ donc $x^2+y^2 = 5$ (3).
On en déduit que $x=1$ ou $x=-1$ (en faisant $(1)+(3)$) et $y=2$ ou $y=-2$. (avec l'opération $(3)-(1)$).
Comme $xy<0$, on conclut avec les deux racines complexes possibles :
$$\boxed{z = 1-2i \text{ ou } z = -1+2i}$$
   (b) On nous dit que $3i$ est racine, donc on peut factoriser par $(z-3i)$ et il existe a, b et c complexes tels que
$$z^3-(5+3i)z^2+(7+16i)z+3-21i = (z-3i)(az^2+bz+c)$$
On a immédiatement $a=1$ et $c=7+i$.
En développant et en considérant le terme en z on a $b(-3i)+7+i = 7+16i$ d'où $b=-5$

Ainsi

$$z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = (z-3i)(z^2 - 5z + 7 + i)$$

Cherchons donc les racines de $z^2 - 5z + 7 + i$.
On a $\Delta = 25 - 28 - 4i = -3 - 4i$. D'après la question a), on peut prendre $\delta = 1 - 2i$ et la formule donne alors

$$z^2 - 5z + 7 + i = 0 \Leftrightarrow z = 2 + i \text{ ou } z = 3 - i$$

Ainsi, les 2 solutions qu'il restait à trouver sont $\boxed{2 + i \text{ et } 3 - i}$

3. Notons $a = \dfrac{z+1}{z-1}$

   Comme $z \in \mathbb{U}$, on a $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$, et ainsi

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1} = \frac{(\frac{1}{z}+1) \times z}{(\frac{1}{z}-1) \times z} \\ &= \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+z}{z-1} \\ \bar{a} &= -a \end{aligned}$$

   Comme $\bar{a} = -a$, on en déduit que $\boxed{a \in i\mathbb{R}.}$

Exercice 2 : exploitation de la forme exponentielle

1. Ecrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$$u = 2\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad v = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$$

2. Déduire de v les valeurs de $\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) \qquad z^6 = u$$

---

1. Le plus efficace est de tout écrire sous forme exponentielle avant de faire le quotient.

$$1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1+3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

   et

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

   D'où $\boxed{u = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ et $v = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\frac{\pi}{4} - \frac{pi}{3}}$, c'est à dire $\boxed{v = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$.

2. D'une part :

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(-\frac{7\pi}{12})$$

   D'autre part :

$$v = \frac{(1-i)(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{3} + i(-1-\sqrt{3})\right)$$

   Ainsi $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(-\dfrac{7\pi}{12}) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$, donc $\boxed{\cos(-\dfrac{7\pi}{12}) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

   et avec la partie imaginaire, $\boxed{\sin(-\dfrac{7\pi}{12}) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(-1-\sqrt{3}) = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

3. Comme $u = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, une solution de $z^6 = u$ est $z_0 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{2\pi}{18}} = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{2\pi}{9}}$.
   De plus, les racines 6ième de l'unité sont données par $\mathbb{U}_6 = \{e^{i\frac{2k\pi}{6}}, k \in [\![0,5]\!]\}$ d'où les solutions de $z^6 = u$:

$$\boxed{\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right)}, k \in [\![0,5]\!]\right\}}$$

Exercice 3 : Sommes et trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs des sommes $A_n(x)$ et $B_n(x)$ suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \text{ et } B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$$

On rappelle que la notation $\cos^2(kx)$ signifie $(\cos(kx))^2$.

1. On considère $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$
   (a) On suppose que x est un multiple de 2π
   Calculez $C_n(x)$ et $S_n(x)$.
   (b) On suppose maintenant que x n'est pas un multiple de 2π.
   Montrez que

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} \text{ et } S_n(x) = \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

2. (a) Calculez $A_n(x) + B_n(x)$.
   (b) Calculez $A_n(x) - B_n(x)$ (indication : relier à la question 1b et distinguez si x est un multiple de π ou pas)
   (c) En déduire les valeurs de A_n et B_n en distinguant deux situations pour x.

---

1. (a) Si x est congru à 0 modulo 2π, c'est à dire si c'est un multiple de 2π, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, kx est également un multiple de 2π, et donc on a $\cos(kx) = \cos(0) = 1$ et $\sin(kx) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \text{ et } S_n(x) = 0.}$$

   (b) Soit $Z_n(x) = C_n(x) + iS_n(x)$. Alors

$$Z_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)+i\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \sum_{k=0}^{n}(\cos(kx)+i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n}e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k$$

   Or $e^{ix} \neq 1$, donc on peut appliquer la formule pour une somme géométrique de raison e^{ix} et

$$Z_n(x) = \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}$$

   On utilise maintenant la factorisation par l'angle moitié :

$$\begin{aligned} Z_n(x) &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n}{2}x}\frac{-2i\sin(\frac{n+1}{2}x)}{-2i\sin\frac{x}{2}} \\ C_n(x)+iS_n(x) &= (\cos(\frac{n}{2}x)+i\sin(\frac{n}{2}x)) \times \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

   Reste à développer et comparer partie réelle et imaginaire pour avoir les formules demandées.

2. (a) Comme pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on a directement

$$\boxed{A_n(x) + B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1}$$

(b) A nouveau, c'est une formule connue : $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$, d'où :

$$A_n(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) - \sin^2(kx) = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = C_n(2x)$$

(c) On obtient un système

$$\begin{cases} A_n(x) + B_n(x) = n+1 \\ A_n(x) - B_n(x) = C_n(2x) \end{cases}$$

d'où

$$A_n = \frac{1}{2}\left(n+1+C_n(2x)\right) \text{ et } B_n = \frac{1}{2}\left(n+1-(C_n(2x))\right).$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } x \text{ est un multiple de } \pi,\ A_n(x) = n+1 \text{ et } \\ B_n(x) = 0 \\ \\ \text{si } x \text{ n'est pas multiple de } \pi, \\ A_n(x) = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(nx)\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin x} \\ \text{et } B_n(x) = \dfrac{n+1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(nx)\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin x} \end{array}}$$

Problème : Limite d'une somme

Cet exercice est constituée de deux parties qui dépendent l'une de l'autre. On pourra néanmoins admettre la dernière question de la première partie pour faire la deuxième, indépendamment des autres questions de la première partie.

Première partie : un encadrement de $\operatorname{sh}(x)$

1. Rappelez la définition de $\operatorname{sh}(x)$, ses variations et sa parité.
2. Rappelez la définition de $\operatorname{ch}(x)$, ses variations et sa parité. Donnez le minimum de $\operatorname{ch}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. (a) Montrez que l'équation $2\operatorname{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution (on ne cherchera pas la valeur exacte de a....)

   (b) Justifiez que la fonction $u : x \mapsto \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x$ est dérivable et montrez que pour tout réel x, $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x \geq 0$
4. Soit $f : x \mapsto e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$.

   (a) Justifiez que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   (b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
5. Montrez que $1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
6. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$1 - x \leq \frac{1}{e^{\operatorname{sh}(x)}},$$
   puis que pour tout $x \in]0, 1[$,
$$1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$
7. Conclure que $\forall x \in]0, 1[$,
$$\ln(1+x) \leq \operatorname{sh}(x) \leq -\ln(1-x)$$

Deuxième partie : étude d'une somme

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \geq 2$.
On considère la somme

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

1. Justifiez que $\forall k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$,
$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$
2. En déduire que $\forall n \geq 2$,
$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$
3. Déterminer la limite de S_n quand $n \to +\infty$

Première partie

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et est impaire.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. La fonction ch est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$ et paire.
3. (a) Comme sh est strictement croissante , $x \mapsto 2\text{sh}(x) + 1$ l'est également. (on peut aussi dériver la fonction $x \mapsto 2\text{sh}(x) + 1$ pour s'en rendre compte en utilisant le fait que $\text{ch}(x) \geq 1$).
   De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} 2\text{sh}(x) + 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\text{sh}(x) + 1 = +\infty$
   Ainsi, $x \mapsto 2\text{sh}(x) + 1$ est strictement croissante, continue, donc est bijective de $\mathbb{R}$ dans l'image de $\mathbb{R}$ qui est $\mathbb{R}$ également (grâce aux limites).
   L'équation $2\text{sh}(x) + 1 = 0$ admet donc une unique solution réelle.

   (b) La fonction u est dérivable comme produit et somme de fonction dérivable, et on a
   $$u'(x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x) + \text{ch}(x) = \text{ch}(x)(2\text{sh}(x) + 1)$$
   Comme $\text{ch}(x) > 0$, $u'(x)$ est du signe de $2\text{sh}(x) + 1$, c'est à dire u décroissante sur $]-\infty, a]$, croissante sur $[a, +\infty[$
   Elle a donc un minimum en a, et ce minimum vaut $u(a) = \text{ch}(a)^2 + \text{sh}(a)$.
   Or $\text{sh}(a) = -\dfrac{1}{2}$, et $\text{ch}(a) \geq 1$ (1 est le minimum de ch), donc $\text{ch}(a)^2 \geq 1$ et $u(a) \geq 1 - \dfrac{1}{2} > 0$.
   On a bien $\boxed{\text{ch}^2(x) + \text{sh}(x) > 0}$
4. (a) Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable autant de fois que l'on veut... Donc deux fois ;-)
   On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$
   $$f'(x) = \text{ch}(x)e^{\text{sh}(x)} - 1 \text{ et } f''(x) = \text{sh}(x)e^{\text{sh}(x)} + \text{ch}^2(x)e^{\text{sh}(x)} = (\text{sh}(x) + \text{ch}^2(x))e^{\text{sh}(x)}$$

   (b) D'après la question $3b$ et comme $e^{\text{sh}(x)} > 0$, on a $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi f' est strictement croissante.
   Or $f'(0) = 1e^0 - 1 = 0$, donc $f'(x) < 0$ pour $x < 0$, et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
   La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$, puis croissante sur $[0, +\infty[$.
5. D'après l'étude précédente, f admet un minimum en 0 et on trouve $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, c'est à dire $e^{\text{sh}(x)} - x - 1 \geq 0$.
   En ajoutant $x + 1$ on a bien
   $$\boxed{1 + x \leq e^{\text{sh}(x)}}$$
6. L'inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ aussi.
   Donc
   $$1 - x \leq e^{\text{sh}(-x)}$$
   Or $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$ et $e^{-\text{sh}(x)} = \dfrac{1}{e^{\text{sh}(x)}}$
   On en déduit
   $$1 - x \leq \frac{1}{e^{\text{sh}(x)}}$$
   Pour tout $x \in]0, 1[$, $1 - x > 0$ et $\dfrac{1}{e^{\text{sh}(x)}} > 0$ également : on peut appliquer l'inverse qui est décroissant sur $]0, +\infty[$:
   $$\frac{1}{1 - x} \geq \frac{1}{\frac{1}{e^{\text{sh}(x)}}} \qquad \text{donc } e^{\text{sh}(x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

En combinant l'inégalité obtenue en 5 avec celle ci, on a donc

$$\boxed{1+x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}}$$

7. Pour tout $x \in]0,1[$, $1+x>0$, tout comme $e^{\mathrm{sh}(x)}$ et $\dfrac{1}{1-x}$: on va pouvoir appliquer la fonction ln a l'inégalité précédente. Comme cette fonction est croissante, on obtient

$$\boxed{\ln(1+x) \leq \mathrm{sh}(x) \leq -\ln(1-x)}$$

Partie 2 :

Assez impressionnante a priori, mais moins technique que la partie 1 !

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \in]0,1[$, donc on peut appliquer l'inégalité obtenue en fin de première partie, et on a immédiatement

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$

2. Effectuons la somme de ces inégalités pour k variant de p à np.
Il vient

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{np} -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

On reconnait S_n au milieu.
Pour les autres sommes :

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} \ln(k+1) - \ln(k)$$

On reconnait un telescopage et il vient

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(np+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{np+1}{n}\right)$$

De même,

$$\sum_{k=n}^{np} -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} \ln(k) - \ln(k-1)$$

A nouveau un telescopage et

$$\sum_{k=n}^{np} -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln(np) - \ln(n-1) = \ln\left(\frac{np}{n-1}\right) = -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

On obtient bien l'encadrement voulu.

3. Il reste à calculer les limites de tout ça :

$$\frac{np+1}{n} = \frac{n(p+\frac{1}{n})}{n} = p + \frac{1}{n}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{np+1}{n} = p$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{np+1}{n}\right) = \ln(p)$
De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{np} = \dfrac{1}{p}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln\left(\dfrac{n-1}{np}\right) = -\ln(\frac{1}{p}) = \ln(p)$
Par le théorème des gendarmes, on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(p)}$$

Bonus (à ne traiter que si tout le reste a été fait)

Attention : cet exercice n'est pas rentable du tout en points !

Soit f la fonction

$$x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donner une expression simple de $f(x)$.

---

1. On peut faire un tableau de signe pour se repérer, et on a $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1]$
   La fonction est donc définie sur $]-1;1]$
2. Elle est dérivable sur $]-1;1[$ et après calcul on trouve

   $$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

   Autrement dit il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos(x) + c$
   Or $f(0) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{1}{2}\arccos(0) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, donc $c = 0$ et finalement

   $$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\arccos(x)}$$