Durée de l'épreuve : 3h. **La calculatrice est interdite.**

Lisez tout le sujet avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices. Le sujet est long, et l'exercice 5 ne doit être fait QUE SI tout le reste a été cherché entièrement.

Une importance particulière sera attribuée **à la rigueur de la rédaction et des justifications.**

Vos résultats devront être encadrés et des points peuvent être retirés si la copie n'est pas bien présentée : il vaut mieux en faire moins, mais le faire proprement.

Exercice 1 : très proche du TD et DM

1. Montrez que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\arccos(2x^2 - 1) = 2\arccos(x)$$

2. (a) Déterminez les racines complexes de $-3 - 4i$.

   (b) On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = 0$$

   On peut vérifier que $z = 3i$ est une solution. Déterminez les deux autres solutions de cette équation.

3. Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ et soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pure.

Exercice 2 : exploitation de la forme exponentielle

1. Ecrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$$u = 2.\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \text{ et } v = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}$$

2. Déduire de v les valeurs de $\cos\left(\dfrac{-7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{-7\pi}{12}\right)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) \qquad z^6 = u$$

Exercice 3 : Sommes et trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs des sommes $A_n(x)$ et $B_n(x)$ suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \text{ et } B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$$

On rappelle que la notation $\cos^2(kx)$ signifie $(\cos(kx))^2$.

1. On considère $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$
   (a) On suppose que x est un multiple de 2π
   Calculez $C_n(x)$ et $S_n(x)$.
   (b) On suppose maintenant que x n'est pas un multiple de 2π.
   Montrez que
   $$C_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} \text{ et } S_n(x) = \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$$
2. (a) Calculez $A_n(x) + B_n(x)$.
   (b) Calculez $A_n(x) - B_n(x)$ (indication : relier à la question 1b et distinguez si x est un multiple de π ou pas)
   (c) En déduire les valeurs de A_n et B_n en distinguant deux situations pour x.

Problème : Limite d'une somme

Cet exercice est constituée de deux parties qui dépendent l'une de l'autre. On pourra néanmoins admettre la dernière question de la première partie pour faire la deuxième, indépendamment des autres questions de la première partie.

Première partie : un encadrement de $\mathrm{sh}(x)$

1. Rappelez la définition de $\mathrm{sh}(x)$, ses variations et sa parité.
2. Rappelez la définition de $\mathrm{ch}(x)$, ses variations et sa parité. Donnez le minimum de $\mathrm{ch}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. (a) Montrez que l'équation $2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution (on ne cherchera pas la valeur exacte de a....)
   (b) Justifiez que la fonction $u : x \mapsto \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh} x$ est dérivable et montrez que pour tout réel x, $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh} x \geq 0$
4. Soit $f : x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1$.
   (a) Justifiez que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   (b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
5. Montrez que $1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
6. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$1 - x \leq \frac{1}{\mathrm{sh}(x)},$$
   puis que pour tout $x \in]0, 1[$,
   $$1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$
7. Conclure que $\forall x \in]0, 1[$,
   $$\ln(1 + x) \leq \mathrm{sh}(x) \leq -\ln(1 - x)$$

Deuxième partie : étude d'une somme

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \geq 2$.
On considère la somme

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

1. Justifiez que $\forall k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

2. En déduire que $\forall n \geq 2$,

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

3. Déterminer la limite de S_n quand $n \to +\infty$

Bonus (à ne traiter que si tout le reste a été fait)

Attention : cet exercice n'est pas rentable du tout en points !

Soit f la fonction

$$x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donner une expression simple de $f(x)$.