DEVOIR MAISON 5 (Suites et séries de fonctions)

Corrigé

D'après CCP MP 2017

Partie 1 : exemples

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left|\frac{1}{2^n}C_n(x)+\frac{1}{3^n}S_n(x)\right| = \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leqslant \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx)\right|+\left|\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

Ainsi, $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$ est un majorant de l'ensemble $\left\{\left|\frac{1}{2^n}C_n(x)+\frac{1}{3^n}S_n(x)\right|, x \in \mathbb{R}\right\}$ et $\left\|\frac{1}{2^n}C_n+\frac{1}{3^n}S_n\right\|_\infty^{\mathbb{R}}$ est le plus petit majorant de cet ensemble.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \left\|\frac{1}{2^n}C_n+\frac{1}{3^n}S_n\right\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$.
Or, les séries géométriques $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{3^n}$ convergent car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc par linéarité, la série numérique $\sum \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ converge.
Par comparaison, on en déduit que la série $\sum \left\|\frac{1}{2^n}C_n+\frac{1}{3^n}S_n\right\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série trigonométrique } \sum \left(\tfrac{1}{2^n}C_n+\tfrac{1}{3^n}S_n\right) \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$.
On a $\left|\frac{e^{ix}}{p}\right| = \frac{1}{p} < 1$ donc la série géométrique $\sum \left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}.}$$

On a donc en multipliant numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{p^n} = \frac{p(p-\cos(x)+i\sin(x))}{(p-\cos(x))^2+\sin^2(x)}.$$

En prenant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que les séries $\sum \frac{\cos(nx)}{p^n}$ et $\sum \frac{\sin(nx)}{p^n}$ convergent et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2-p\cos(x)}{p^2-2p\cos(x)+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$$

Il reste à combiner les résultats pour $p=2$ et $p=3$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}+\frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ avec égalité lorsque $x = \dfrac{\pi}{2n}$.
On en déduit $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est le maximum de la fonction $x \mapsto \left|\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right|$ sur $\mathbb{R}$ d'où $\|\dfrac{1}{\sqrt{n}}S_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \geqslant 1$), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série trigonométrique } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}.}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\exp(e^{ix}) &= \exp(\cos x + i\sin x) = \exp(\cos x)\exp(i\sin x) = \exp(\cos x)\left(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)\right)\\ &= \underbrace{\exp(\cos x)\cos(\sin x)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\exp(\cos x)\sin(\sin x)}_{\in\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Re}(\exp(e^{ix})) = \varphi(x)$.
Or, on sait de plus que pour tout complexe z, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme e^z.
En appliquant ceci avec $z = e^{ix}$, on obtient :

$$\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}.$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{e^{inx}}{n!}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{inx}}{n!}\right)$ converge et on a :

$$\mathrm{Re}(\exp(e^{ix})) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{inx}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}.$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n!}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est la somme de la série trigonométrique } \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} C_n.}$$

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

1. On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leqslant |a_n\cos(nx)| + |b_n\sin(nx)| \leqslant \underbrace{|a_n| + |b_n|}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|a_nC_n + b_nS_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant |a_n| + |b_n|$.
Or, les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent donc par linéarité, la série numérique $\sum(|a_n| + |b_n|)$ converge.
Par comparaison, on en déduit que la série $\sum \|a_nC_n + b_nS_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si les séries } \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ convergent absolument alors la série trigonométrique } \sum(a_nC_n + b_nS_n)\\ \text{converge normalement sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$

Une condition nécessaire

2. Si $(a,b)=(0,0)$ alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $|a\cos x+b\sin x|=0=\sqrt{a^2+b^2}$.
   On suppose désormais $(a,b)\neq(0,0)$.
   Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, il existe $\varphi\in[0,2\pi[$ tel que $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
   On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}$:
   $$|a\cos x+b\sin x|=\sqrt{a^2+b^2}|\cos\varphi\cos x+\sin\varphi\sin x|=\sqrt{a^2+b^2}|\cos(\varphi-x)|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$$
   avec égalité lorsque $x=\varphi$.
   Ainsi :
   $$\boxed{\text{le maximum de la fonction } x\mapsto|a\cos x+b\sin x| \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \sqrt{a^2+b^2}.}$$

3. On suppose que la série $\sum\|a_nC_n+b_nS_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
   D'après la question précédente, en remarquant que pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, lorsque x parcourt $\mathbb{R}$ alors nx parcourt $\mathbb{R}$, on a :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \|a_nC_n+b_nS_n\|_\infty^{\mathbb{R}}=\operatorname*{Max}_{x\in\mathbb{R}}|a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$
   Or, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant|a_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2}$.
   Comme la série $\sum\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ converge, on en déduit par comparaison que la série $\sum|a_n|$ converge c'est-à-dire que la série $\sum a_n$ converge absolument.
   En raisonnant de même avec b_n, on déduit que :
   $$\boxed{\text{si la série } \sum(a_nC_n+b_nS_n) \text{ converge normalement sur } \mathbb{R} \text{ alors les séries } \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ sont absolument convergentes.}}$$

Autres propriétés

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $a_nC_n+b_nS_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   La série de fonctions $\sum(a_nC_n+b_nS_n)$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
   On en déduit, par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, que la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   De plus, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:
   $$f(x+2\pi)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_k\cos(nx+2n\pi)+b_k\sin(nx+2n\pi))=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))=f(x)$$
   par 2π-périodicité des fonctions cosinus et sinus. Ainsi :
   $$\boxed{f\in\mathscr{C}_{2\pi}.}$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On obtient en linéarisant (on peut pour cela passer par les formules d'Euler) :
   $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos(2nx)+1)\,dx=\left[\frac{1}{4n}\sin(2nx)+\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi.$$
   Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^2$. Comme la fonction $x\mapsto\sin(kx)\cos(nx)$ est impaire, on a :
   $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx=0.$$
   $$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx=\pi \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx=0}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\cos(nx)\,dx.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k : x \mapsto (a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\cos(nx)$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |u_k(x)| \leqslant |a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)| \leqslant \underbrace{\|a_kC_k+b_kS_k\|_\infty^{\mathbb{R}}}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \|a_kC_k+b_kS_k\|_\infty^{\mathbb{R}}$.
Comme la série $\sum \|a_kC_k+b_kS_k\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge, on en déduit par comparaison que la série $\sum \|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
Ainsi, la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[-\pi,\pi]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction u_k est continue sur $[-\pi,\pi]$.
On peut donc intervertir les symboles intégrale et somme :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx))\,dx\right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n(f) = a_n \text{ et } \alpha_0(f) = 2a_0.}$$

7. On utilise la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \ \text{ et } \ \beta_n(f) = \beta_n(g).}$$

8. D'après la question 4., on a $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ donc on a $g - f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.
De plus, par linéarité de l'intégrale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n(g-f) = \alpha_n(g) - \alpha_n(f) = 0 \text{ et } \beta_n(g-f) = \beta_n(g) - \beta_n(f) = 0.$$

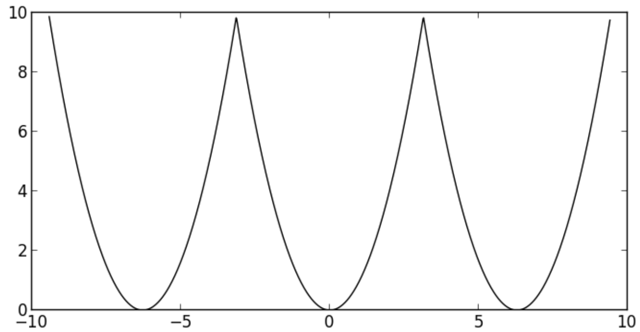
Par le résultat admis, on en déduit que $g - f$ est la fonction nulle.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g(x) = f(x).}$$

9. Si f est une fonction paire alors la fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et la fonction $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\beta_n(f) = 0 \text{ et } \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx.}$$

10. Ci-dessous le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$:



Comme la fonction f est paire, on a :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \beta_n(f) = 0.}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx)\, dx$$

Une double intégration par parties donne (les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, \pi]$) :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \cos(nx)\, dx &= \underbrace{\left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin(nx)\, dx \\
&= -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\, dx\right) \\
&= \frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2} + \frac{1}{n}\underbrace{\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n(f) = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.}$$

On a aussi :

$$\boxed{\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2.}$$

Comme les séries $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument (série de Riemann d'exposant $2 > 1$ et série nulle), d'après la première question de la partie II, la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)C_n + \beta_n(f)S_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc d'après le résumé après la question 8., on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).}$$

11. Pour $x = 0$, on a $f(0) = 0^2 = 0$ donc par la question précédente, $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = 0$ d'où :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

Pour $x = \pi$, on a $f(\pi) = \pi^2$ donc par la question précédente, $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \pi^2$ donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

On découpe cette somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (ce qui est possible car ces deux séries sont convergentes), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

12. Dans l'exemple de la question 10, on a obtenu une série trigonométrique normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Cependant, sa somme f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec pour nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).

> La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose que les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ sont absolument convergentes.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_nC_n + b_nS_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(a_nC_n + b_nS_n)'(x) = -na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx).$$

- Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument car $|a_n| = o(\underbrace{n|a_n|}_{\geqslant 0})$ et $|b_n| = o(\underbrace{n|b_n|}_{\geqslant 0})$.
  On en déduit (question 1 de la partie II) que la série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)$ converge normalement et donc simplement sur $\mathbb{R}$.
- Les séries $\sum(-na_n)$ et $\sum nb_n$ convergent absolument donc (question 1 de la partie II) la série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)'$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On en déduit, par le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des sommes de séries de fonctions, que la fonction somme de la série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on peut la dériver terme à terme.

> La convergence absolue des séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ est donc une condition suffisante.

13. On a vu à la question I.2 que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{3^n}$.
Comme les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ convergent absolument (par le critère de d'Alembert pour $\sum nb_n$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{3^n} > 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1$), d'après la question précédente, on peut dériver terme à terme. On obtient alors en dérivant l'égalité ci-dessus :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}.}$$