DM6 (Réduction)
Pour le vendredi 8 décembre

Problème 1 : Décomposition de Dunford (niveau 1)

Notations
Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à cœfficients dans $\mathbb{K}$.

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement.

Théorème 1

Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés suivantes :

(1) $A = D + N$;

(2) D est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;

(3) N est nilpotente c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$;

(4) $DN = ND$.

Le couple (D, N) s'appelle *la décomposition de Dunford de A*.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.

Partie I : Quelques exemples

Q1 a) Justifier que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Dunford dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice M ?

b) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque A est nilpotente.

En déduire la décomposition de Dunford de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Justifier que toute matrice trigonalisable admet une décomposition de Dunford.

Q2 Donner un exemple d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (une telle matrice n'admet pas de décomposition de Dunford).

Q3 Dans cette question uniquement, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A.

Justifier que A admet une décomposition de Dunford puis donner le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q4 Dans cette question uniquement, on suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et vérifie $A^2(A - I_n) = 0_n$.
Montrer que $X(X-1)$ est un polynôme annulateur de A^2.
Démontrer que le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Q5 Dans cette question uniquement, on considère deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.
Montrer que si (D,N) est la décomposition de Dunford de B alors (PDP^{-1}, PNP^{-1}) est la décomposition de Dunford de A.

Partie II : Un exemple par deux méthodes

Pour toute cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On note u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice A.
On note id l'application identité de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Q6 La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Q7 Déterminer une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_1),\ \ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_2) \text{ et } \ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}(e_2, e_3).$$

En déduire que $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$.
Écrire la matrice B de u dans la base $\mathscr{B}$.

Q8 Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
En déduire le couple (on calculera explicitement ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Q9 Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{(x-2)^2}.$$

En déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1.$$

Q10 On pose les endomorphismes :

$$p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2 \text{ et } q = U(u) \circ (u - \mathrm{id}).$$

Déterminer $p + q$ et en déduire que pour tout $x \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $p(x) + q(x) = x$.
Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{id})$.

Q11 On pose $d = p + 2q$.
Écrire la matrice de d dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la question **Q7**.
Montrer que l'endomorphisme d est diagonalisable, qu'on a $(u-d)^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))}$ et que les endomorphismes d et $u - d$ commutent.
En déduire le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Problème 2 : Deux démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton (niveau 2)

Méthode 1 : par les matrices compagnons (version endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Q1 Dans cette question uniquement, on suppose que x est un vecteur de E tel que la famille $\mathscr{B} = \big(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Calculer le polynôme caractéristique de f.

c) En déduire $\chi_f(f)(x)$.

Q2 On revient au cas général, en supposant que x est un vecteur quelconque de E non nul.

a) Montrer qu'il existe un entier k compris entre 1 et n tel que $\mathscr{F} = \big(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\big)$ est libre et $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est stable par f.

b) Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B} = \big(e_0, \ldots, e_{n-1}\big)$ de E telle que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $e_j = f^j(x)$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

c) Montrer que $\chi_f(f)(x) = 0_E$.

Q3 Conclure.

Méthode 2 : par trigonalisation (version matricielle)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On voit A comme une matrice à cœfficients complexes et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.

Q4 Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les cœfficients diagonaux de T.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $P_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$.

Q5 Donner l'expression de χ_A en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Q6 Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1)$, $P_1(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Q7 Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose $\mathscr{P}(k)$: $\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, $P_k(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, $P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

b) Montrer que $(u - \lambda_{k+1}\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

c) En déduire que $P_{k+1}(u)(e_{k+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

d) En déduire $\mathscr{P}(k+1)$: $\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$, $P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Q8 Conclure.