

---

**DEVOIR SURVEILLÉ 3 – Sujet CCINP**

29/11/23

Durée 4h

---

**EXERCICE 1 - RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE**

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les relations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (P)$$

**Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)**

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

**A. - Existence de la solution**

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $\varphi_k : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

**Q1.** Montrer que la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ .

Dans tout le reste de cet exercice, on note  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la somme de la série  $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ .

**Q2.** Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ .

**Q3.** En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

**Q4.** En déduire que la série  $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$  converge uniformément sur  $]0, +\infty[$ .

**Q5.** Montrer que la fonction  $\varphi$  est une solution de (P).

**B. - Unicité de la solution**

**Q6.** Montrer que si  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de (P) alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

**Q7.** En déduire que la fonction  $\varphi$  est l'unique solution de (P).

## Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  du problème (P).

**Q8.** Montrer que la fonction  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Q9.** En utilisant le fait que  $\varphi$  est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de  $\varphi$  au voisinage de  $0^+$ .

**Q10.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} \varphi'_k$  converge normalement sur  $[\varepsilon, +\infty[$ .

**Q11.** Montrer que la fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que l'on a :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

**Q12.** En déduire que la fonction  $\varphi$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

**Q13.** En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de  $\varphi$  en  $+\infty$ .

## EXERCICE 2 : APPROXIMATION DE LA RACINE CARRÉE D'UN RÉEL POSITIF PAR LA MÉTHODE DE HÉRON

On considère la suite de fonctions  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, f_k(x) = \frac{1}{2} \left( f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right).$$

On admet que la suite  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est correctement définie par les relations ci-dessus.

Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_k(x) > 0.$$

### Partie I - Convergence de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

**Q14.** Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . En calculant  $(f_k(x))^2 - x$ , montrer que  $f_k(x) \geq \sqrt{x}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Q15.** Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que la suite  $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

**Q16.** Déduire des deux questions précédentes que la suite de fonctions  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .

## Partie II - Majoration de l'erreur

**Q17.** Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right).$$

**Q18.** Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}.$$

**Q19.** Montrer que pour tout  $a > 0$ , la suite de fonctions  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0, a]$ .

## EXERCICE 3 : ENDOMORPHISME CYCLIQUE

### Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle que pour tout entier  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note :

$$f^0 = \text{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme  $f$  est cyclique s'il existe un vecteur  $v \in E$  tel que la famille  $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$  soit une base de l'espace vectoriel  $E$ .

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes. Les deux premières sont consacrées à l'étude d'exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

### Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (4x - 2y, x + y).$$

**Q20.** En considérant  $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ , montrer que  $f$  est un endomorphisme cyclique de  $\mathbb{R}^2$ .

**Q21.** Déterminer les valeurs propres de  $f$  et donner une base de chaque sous-espace propre de  $f$ .

**Q22.** Existe-t-il un vecteur  $w \in \mathbb{R}^2$  non nul tel que la famille  $(w, f(w))$  ne soit pas une base de  $\mathbb{R}^2$  ?

## Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

**Q23.** Montrer que l'on a la relation  $g^2 = g + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .

**Q24.** Montrer que la matrice  $M$  est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

**Q25.** L'endomorphisme  $g$  est-il cyclique ?

## Partie III - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable  $h$  d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de  $h$  pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme  $h$  est diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  de l'espace vectoriel  $E$  composée de vecteurs propres de  $h$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  la valeur propre associée au vecteur propre  $v_k$ .

Soit  $v \in E$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$  tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

**Q26.** Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n.$$

**Q27.** Montrer que le déterminant de la famille  $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$  dans la base  $\mathcal{B}$  est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \dots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

**Q28.** Conclure que  $h$  est cyclique si et seulement si il admet  $n$  valeurs propres distinctes.

## EXERCICE 4 : ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME SUR UN ESPACE DE POLYNÔMES

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si  $U \in \mathbb{C}[X]$  et  $V \in \mathbb{C}[X]$  sont deux polynômes avec  $V \neq 0$ , alors il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$  tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(V).$$

Les polynômes  $Q$  et  $R$  sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme  $U$  par  $V$ .

Dans tout l'exercice, on se donne un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et un couple  $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$  tel que  $\deg(B) = n + 1$ . On considère également l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{C}_n[X]$  qui à un polynôme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  associe le reste dans la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ .

Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors en effectuant la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

donc on a  $\varphi(P) = 2X^2 + X$ .

### Partie I - Généralités sur l'application $\varphi$

Dans cette partie, on démontre que l'application  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

**Q29.** Justifier que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , on a  $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$ .

On considère deux polynômes  $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$  et  $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ . Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe  $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$  et  $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$  tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

**Q30.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de  $A(P_1 + \lambda P_2)$  par  $B$  en fonction de  $\lambda$  et des polynômes  $Q_1, Q_2, R_1$  et  $R_2$  en justifiant votre réponse.  
En déduire que  $\varphi$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}_n[X]$ .

### Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1.$$

**Q31.** Montrer que la matrice de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{C}_2[X]$  dans la base  $(1, X, X^2)$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

**Q32.** Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice  $M$ .

**Q33.** Justifier que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable. Déterminer une base de  $\mathbb{C}_2[X]$  formée de vecteurs propres de  $\varphi$ .

### Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que  $n = 2$  et que  $B = X^3$ .

Comme  $A$  est un élément de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}_2[X]$ , il existe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$  tel que  $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ .

**Q34.** Montrer que la matrice de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{C}_2[X]$  dans la base  $(1, X, X^2)$  est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

**Q35.** Montrer que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable si et seulement si le polynôme  $A$  est constant.

## Partie IV - Étude du cas où $B$ est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que  $n = 2$  : le nombre  $n$  est un entier quelconque de  $\mathbb{N}^*$ . Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que  $B$  est un polynôme scindé à racines simples.

On note  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  les racines de  $B$  qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange  $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$  associés aux points  $x_0, \dots, x_n$  par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

On rappelle que la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

**Q36.** Donner sans démonstration la valeur de  $L_k(x_j)$  pour tout  $(k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ .

Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ . Donner sans démonstration les coefficients de  $P$  dans la base  $(L_0, \dots, L_n)$ .

Pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on désigne respectivement par  $Q_k \in \mathbb{C}[X]$  et  $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$  le quotient et le reste dans la division euclidienne de  $AL_k$  par  $B$ .

**Q37.** Soit  $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ . Montrer que  $R_k(x_j) = 0$  si  $j \neq k$  et que  $R_k(x_k) = A(x_k)$ .

**Q38.** En déduire que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$ .

**Q39.** Justifier que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.