CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 3 - Sujet 1

Exercice 1 - Résolution d'une équation fonctionnelle (extrait CCINP PC 2021)

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

A. - Existence de la solution

Q1. Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrons que la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ converge.

Méthode 1 :

- On a $\left|\dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right| = \dfrac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k^2} \geqslant 0$.
- La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge (car c'est une série de Riemann avec $2 > 1$).

Par comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ converge absolument donc converge.

Méthode 2 :

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(x+k)^2} \geqslant 0$ donc il s'agit d'une série alternée.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $0 < x+k \leqslant x+k+1$ donc par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ puis décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\dfrac{1}{(x+k)^2} \geqslant \dfrac{1}{(x+k+1)^2}$.
On en déduit que la suite $\left(\dfrac{1}{(x+k)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{(x+k)^2} = 0$.
On en déduit par le critère de Leibniz, que la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$$

Q2. Soit $x \in]0,+\infty[$.
On a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.
En posant $\ell = k+1$ dans la première somme puis en sortant le premier terme de la deuxième somme, on obtient :

$$\varphi(x+1) + \varphi(x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{(x+\ell)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = -\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{(x+\ell)^2} + \left(\frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[,\ \varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}.}$$

Q3. Soit $x \in]0,+\infty[$.
Comme vu à la question 1. *Méthode 2*, la suite $\left(\dfrac{1}{(x+k)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

On en déduit par le théorème spécial des séries alternées que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^2}\right| = \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}.}$$

Q4. D'après 1, la série $\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$.

Montrons que la suite des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après la question 3., on a :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2} \leqslant \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{\text{ne dépend pas de } x} \qquad \text{car } x+n+1 \geqslant n+1 > 0.$$

Ainsi, $\frac{1}{(n+1)^2}$ est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|, x \in]0,+\infty[\}$ et $\|R_n\|_\infty^{]0,+\infty[}$ en est le plus petit.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|R_n\|_\infty^{]0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que $\lim_{n \to +\infty} \|R_n\|_\infty^{]0,+\infty[} = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \textstyle\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k \text{ converge uniformément sur }]0,+\infty[.}$$

Q5. Avec la question 2, il ne reste plus qu'à vérifier que $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.
Utilisons le théorème de la double limite.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x \to +\infty} \varphi_k(x) = 0 \in \mathbb{R}$.
- D'après la question 4, la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

Par le théorème de la double limite, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est une solution de } (P).}$$

B. - Unicité de la solution

Q6. On suppose que $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P).

Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

Initialisation : Cas $n = 0$.
On a $(-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = -f(x+1) + \frac{1}{x^2} = f(x)$ puisque f vérifie (P).
La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

Comme f est solution de (P), on a pour tout $y \in]0,+\infty[$, $f(y) + f(y+1) = \frac{1}{y^2}$.

En appliquant ceci avec $y = x+n+1 > 0$, on obtient $f(x+n+1) = \frac{1}{(x+n+1)^2} - f(x+n+2)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(x+n+1)^2} - f(x+n+2)\right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\
&= (-1)^{n+2} f(x+n+2) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^2} \\
&= (-1)^{n+2} f(x+n+2) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion : On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.}$$

Q7. On suppose que $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P).
Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrons que $f(x) = \varphi(x)$.
D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ (*).
On a $\lim_{n\to+\infty}(x+n+1) = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} f(y) = 0$ puisque f est solution de (P), donc par composition, $\lim_{n\to+\infty} f(x+n+1) = 0$.
Comme la suite $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} f(x+n+1) = 0$.
D'autre part, par définition, on a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \varphi(x)$ (série convergente d'après la question 1.).
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*), on en déduit que $f(x) = \varphi(x)$.
On a donc prouvé que $f = \varphi$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est l'unique solution du problème } (P).}$$

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Q8. ▸ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction φ_k est continue sur $]0,+\infty[$ (car c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$).
▸ D'après la question 4, la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
Par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

Q9. Par la question 2, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \frac{1}{x^2}$ donc $x^2\varphi(x) = 1 - x^2\varphi(x+1)$.
Par continuité de la fonction φ en 1, on a $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x+1) = \varphi(1)$.
Par opérations sur les limites, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} (1 - x^2\varphi(x+1)) = 1$ d'où $\lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi(x)}{1/x^2} = 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}.}$$

Q10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction φ_k est dérivable sur $]0,+\infty[$ (d'après les théorèmes généraux) et on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\varphi_k'(x) = (-1)^k \times (-2) \times 1 \times (x+k)^{-3} = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Montrons que la série $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k'$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $|\varphi_k'| : x \mapsto \dfrac{2}{(x+k)^3}$ est décroissante sur $[\varepsilon, +\infty[$ donc elle admet un maximum atteint en ε, qui vaut $\dfrac{2}{(\varepsilon+k)^3}$.
On en déduit que $\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} = \dfrac{2}{(\varepsilon+k)^3}$.
Or, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ converge (car $\dfrac{2}{(\varepsilon+k)^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{k^3}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{k^3} \geqslant 0$ et la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3}$ converge puisque $3 > 1$).
On en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k' \text{ converge normalement } [\varepsilon, +\infty[.}$$

Q11. ▸ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction φ_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (d'après les théorèmes généraux).
▸ La série $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
▸ Soit $\varepsilon > 0$. Par la question précédente, la série $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k'$ converge normalement donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.
Par le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des sommes de séries de fonctions, on en déduit que la fonction $\varphi_{|[\varepsilon,+\infty[}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon, +\infty[$ et on peut dériver terme à terme sur $[\varepsilon, +\infty[$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et la classe $\mathscr{C}^1$ étant une propriété locale, on en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ donc dérivable sur }]0, +\infty[\\ \text{et on a pour tout } x \in]0, +\infty[,\ \varphi'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.\end{array}}$$

Q12. Soit $x \in]0, +\infty[$. On a $\varphi'(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.
Comme la suite $\left(\dfrac{2}{(x+k)^3}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, on en déduit par le critère spécial des séries alternées que la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ est du signe de son premier terme c'est-à-dire de $\frac{-2}{x^3}$ qui est négatif.
On a donc $\varphi'(x) \leqslant 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[.}$$

Q13. Soit $x \in]1, +\infty[$.
Par décroissance de la fonction φ sur $]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(x-1)$ et donc :

$$\varphi(x) + \varphi(x+1) \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \varphi(x-1) + \varphi(x).$$

Or, par la question 2., on a $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \dfrac{1}{x^2}$ et $\varphi(x-1) + \varphi(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ (puisque $x - 1 > 0$).
Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[,\ \ \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}.}$$

Comme $\dfrac{1}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, on en déduit par encadrement que $2\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.
Ainsi :

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}.}$$

Exercice 2 - Approximation de la racine carrée d'un réel positif par la méthode de Héron (extrait CCINP PC 2021)

Partie I - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Q14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(f_k(x))^2 - x = \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 - x = \frac{1}{4}\left((f_{k-1}(x))^2 + \frac{x^2}{(f_{k-1}(x))^2} + 2x\right) - \frac{4x}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left((f_{k-1}(x))^2 + \frac{x^2}{(f_{k-1}(x))^2} - 2x\right) = \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 \geqslant 0.$$

On en déduit que $(f_k(x))^2 \geqslant x$ donc par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $|f_k(x)| \geqslant \sqrt{x}$ et comme $f_k(x) \geqslant 0$, on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ f_k(x) \geqslant \sqrt{x}.}$$

Q15. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. On a :

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{1}{2}\left(-f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right) = \frac{x - (f_{k-1}(x))^2}{2f_{k-1}(x)}.$$

Comme d'après la question précédente, $(f_{k-1}(x))^2 \geqslant x$ (car $k-1 \in \mathbb{N}^*$) et $f_{k-1}(x) > 0$ (résultat admis), on en déduit que $f_k(x) - f_{k-1}(x) \leqslant 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } \big(f_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

Q16. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La suite $\big(f_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par $\sqrt{x}$) donc par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel supérieur ou égal à $\sqrt{x}$. On note $f(x)$ ce réel.
Par décalage d'indice, on a également $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{k-1}(x) = f(x)$.
Par passage à la limite dans l'égalité $f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)$, on en déduit que :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{x}{f(x)}\right) \text{ d'où } (f(x))^2 = x.$$

Comme $f(x) \geqslant 0$, on en déduit que $f(x) = \sqrt{x}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers la fonction } f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \sqrt{x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+.}$$

Partie II - Majoration de l'erreur

Q17. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(f_k(x) - \sqrt{x} - \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^2}{f_k(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) - \sqrt{x} = f_{k+1}(x) - \sqrt{x}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right).}$$

Q18. Notons tout d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f_k(x) - \sqrt{x} \geqslant 0$ d'après la question 14, donc $|f_k(x) - \sqrt{x}| = f_k(x) - \sqrt{x}$.
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(x) - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1+x}{2^k}$.

Initialisation : Pour $k=1$, on a $f_1(x)=\dfrac{1}{2}\left(f_0(x)+\dfrac{x}{f_0(x)}\right)=\dfrac{1+x}{2}$.

On a donc $f_1(x)-\underbrace{\sqrt{x}}_{\geqslant 0}\leqslant f_1(x)=\dfrac{1+x}{2^1}$.

Donc l'inégalité est bien vérifiée pour $k=1$.

Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose que $f_k(x)-\sqrt{x}\leqslant\dfrac{1+x}{2^k}$.

On a $1-\underbrace{\dfrac{\sqrt{x}}{f_k(x)}}_{\geqslant 0}\leqslant 1$ donc en multipliant par le réel positif $\dfrac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}$, on obtient par la question 17 :

$$f_{k+1}(x)-\sqrt{x}\leqslant\frac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\leqslant\frac{1+x}{2^{k+1}}$$

par hypothèse de récurrence.

L'inégalité est donc vérifiée au rang $k+1$.

Par principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ |f_k(x)-\sqrt{x}|\leqslant\frac{1+x}{2^k}.}$$

Q19. Soit $a>0$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in[0,a]$. On a par la question précédente :

$$|f_k(x)-\sqrt{x}|\leqslant\frac{1+x}{2^k}\leqslant\underbrace{\frac{1+a}{2^k}}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

On en déduit que $\dfrac{1+a}{2^k}$ est un majorant de l'ensemble $\{|f_k(x)-\sqrt{x}|, x\in[0,a]\}$.

Comme $\|f_k-f\|_\infty^{[0,a]}=\operatorname*{Sup}_{x\in[0,a]}|f_k(x)-\sqrt{x}|$ est le plus petit des majorants de cet ensemble, on en déduit que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$0\leqslant\|f_k-f\|_\infty^{[0,a]}\leqslant\frac{1+a}{2^k}.$$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1+a}{2^k}=0$ (puisque $2>1$), on en déduit par le théorème de limite par encadrement que $\lim\limits_{k\to+\infty}\|f_k-f\|_\infty^{[0,a]}=0$.

Cela signifie que :

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers la fonction } f:x\mapsto\sqrt{x} \text{ sur } [0,a].}$$

Exercice 3 - Endomorphisme cyclique (extrait CCINP PC 2023)

Partie I - Étude d'un premier exemple

Q20. Avec $v=(1,0)$, on a $f(v)=(4,1)$.

La famille $(v,f(v))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ (car constituée de deux vecteurs non colinéaires), de cardinal $2=\dim(\mathbb{R}^2)$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme cyclique de } \mathbb{R}^2.}$$

Q21. Notons $\mathscr{C}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ est la matrice $A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A=X^2-\operatorname{tr}(A)X+\det(A)=X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$.

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{2,3\}$.
Les valeurs propres 2 et 3 sont de multiplicité 1 donc les sous-espaces propres associés sont de dimension 1 (car la dimension du sous-espace propre est supérieure à 1 et inférieure à la multiplicité de la valeur propre correspondante).
On constate de plus que la somme des cœfficients sur chaque ligne de A vaut 2 donc $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
Ainsi, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre (car constituée d'un vecteur non nul) de $E_2(A)$, de cardinal 1 avec $1 = \dim(E_2(A))$ donc c'est une base de $E_2(A)$.
On a $A - 3I_2 = \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & -2\end{pmatrix}$ et on constate que $(A-3I_2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
Ainsi, on prouve de même que $\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_3(A)$.
Comme A est la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$, f a les mêmes valeurs propres de A et les sous-espaces propres sont reliés par les relations vectoriel/matriciel dans la base $\mathscr{C}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont 2 et 3, } ((1,1)) \text{ est une base de } E_2(f) \text{ et } ((2,1)) \text{ est une base de } E_3(f).}$$

Q22. Posons $w = (1,1)$. On sait par ce qui précède que $f(w) = 2w$ donc la famille $(w, f(w))$ est liée et n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un vecteur } w \in \mathbb{R}^2 \text{ non nul tel que la famille } (w,f(w)) \text{ ne soit pas une base de } \mathbb{R}^2.}$$

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Q23. On a $M^2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 2 & -1\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ et $M + 2I_3 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 2 & -1\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ donc $M^2 = M + 2I_3$.
Comme M est la matrice de g dans une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que :

$$\boxed{g^2 = g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}.}$$

Q24. La matrice M est symétrique à cœfficients réels donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$
Posons $P = X^2 - X - 2$. On a $P(M) = M^2 - M - 2I_3 = 0_3$ donc P est un polynôme annulateur de M.
On en déduit que les valeurs propres de M sont des racines de P.
Comme $P = (X+1)(X-2)$, on a donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1,2\}$.
Le polynôme P est un polynôme annulateur de M, scindé à racines simples, ce qui donne une nouvelle preuve de la diagonalisabilité de M.
Étudions si le réel -1 est une valeur propre de M.
On a $M + I_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ qui est de rang 1 car $C_2 = -C_1$, $C_3 = C_1$ et $C_1 \neq 0_{3,1}$.
Comme $\mathrm{rg}(M + I_3) \neq 3$, on en déduit que $-1 \in \mathrm{Sp}M$ et par le théorème du rang, on a

$$\dim(E_{-1}) = \dim(\mathrm{Ker}(M + I_3)) = 3 - 1 = 2.$$

Comme M est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension de son sous-espace propre.
On en déduit que -1 est une valeur propre de multiplicité 2.
Comme χ_M est de degré 3, il y a nécessairement une autre valeur propre donc 2 est aussi une valeur propre de M.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } M \text{ sont } -1 \text{ et } 2.}$$

Q25. Soit $v \in \mathbb{R}^3$.
La famille $(v, g(v), g^2(v))$ est liée car d'après la question 23, $g^2(v) = g(v) + 2v$.
Il n'existe donc pas de vecteur v de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $(v, g(v), g^2(v))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } g \text{ n'est pas cyclique.}}$$

Partie III - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Q26. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Comme v_k est un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ_k, on a $h(v_k) = \lambda_k v_k$.
Par le cours, on sait alors que si P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on a $P(h)(v_k) = P(\lambda_k)v_k$.
En appliquant ceci avec $P = X^p$, on obtient que $h^p(v_k) = \lambda_k^p v_k$.
Or, comme $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, on a par linéarité de h^p :

$$h^p(v) = \alpha_1 h^p(v_1) + \cdots + \alpha_n h^p(v_n).$$

En remplaçant par l'égalité obtenue pour $h^p(v_1), \ldots, h^p(v_n)$, on en déduit que :

$$\boxed{h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p (v_n).}$$

Q27. On a $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et par la question 26, pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(h^p(v)) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1^p \\ \vdots \\ \alpha_n \lambda_n^p \end{pmatrix}$.
On en déduit que :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \alpha_1 \ldots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

par linéarité du déterminant par rapport à chaque ligne.
On reconnaît alors le déterminant de Vandermonde $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (éventuellement en transposant si la définition a été donnée dans l'autre sens, une matrice et sa transposée ayant le même déterminant).
Comme $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$, on en déduit le résultat souhaité :

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \ldots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).}$$

Q28. $\star$ Si h admet n valeurs propres distinctes alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on a $\lambda_i \neq \lambda_j$ (car tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 donc deux vecteurs propres de la famille $\mathscr{B}$ ne peuvent pas être associés à la même valeur propre, sinon $\mathscr{B}$ serait une famille liée).
On en déduit que $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$.
En prenant par exemple $v = v_1 + \cdots + v_n$, on a alors par la question précédente $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$
donc la famille $\mathscr{F}$ est une base de E.
On en déduit que l'endomorphisme h est cyclique.
$\star$ Si h est cyclique alors il existe $v \in E$ tel que la famille $\mathscr{F}$ soit une base de E et donc vérifiant $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$.
On a alors nécessairement $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ par la question précédente donc pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i < j$, on a $\lambda_j \neq \lambda_i$.
On en déduit que h admet n valeurs propres distinctes.

$$\boxed{h \text{ est cyclique si et seulement s'il admet } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$$

Exercice 4 - Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes (extrait CCINP PC 2022)

Partie I - Généralités sur l'application φ

Q29. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
Par définition, $\varphi(P)$ est le reste dans la division euclidienne de AP par B.
C'est donc un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur au degré de B qui est $n+1$.
Ainsi, $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n c'est-à-dire $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \in \mathbb{C}_n[X], \text{ on a } \varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X].}$$

Q30. On a :

$$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2.$$

De plus, comme R_1 et R_2 sont deux éléments de $\mathbb{C}_n[X]$, $R_1 + \lambda R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ (par stabilité de $\mathbb{C}_n[X]$ par combinaison linéaire).
En posant $Q = Q_1 + \lambda Q_2$ et $R = R_1 + \lambda R_2$, on a donc trouvé un couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$A(P_1 + \lambda P_2) = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B).$$

On en déduit par unicité que :

$$\boxed{\begin{array}{l} Q = Q_1 + \lambda Q_2 \text{ est le quotient et } R = R_1 + \lambda R_2 \text{ le reste dans la division euclidienne} \\ \text{de } A(P_1 + \lambda P_2) \text{ par } B. \end{array}}$$

Par définition, $\varphi(P_1)$ est le reste dans la division euclidienne de AP_1 par B donc $\varphi(P_1) = R_1$,
$\varphi(P_2)$ est le reste dans la division euclidienne de AP_2 par B donc $\varphi(P_2) = R_2$
et $\varphi(P_1 + \lambda P_2)$ est le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B donc par ce qui précède, $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2$.
On a ainsi :

$$\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2).$$

L'application φ est donc une application linéaire de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ (d'après la question 29)) donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_n[X].}$$

Partie II - Étude d'un premier exemple

Q31. Pour établir le résultat souhaité, il suffit de vérifier que :

$$\varphi(1) = 2X + X^2, \ \varphi(X) = 1 + X + X^2 \text{ et } \varphi(X^2) = 1 + 2X.$$

Par définition, $\varphi(1)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = X^2 + 2X$ par $B = X^3 + X^2 - X - 1$.
On a $X^2 + 2X = 0 \times B + X^2 + 2X$ avec $\deg(X^2 + 2X) = 2 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(1) = X^2 + 2X$.
Par définition, $\varphi(X)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = X^3 + 2X^2$ par $B = X^3 + X^2 - X - 1$.
On a $X^3 + 2X^2 = 1 \times B + X^2 + X + 1$ avec $\deg(X^2 + X + 1) = 2 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(X) = X^2 + X + 1$.
Par définition, $\varphi(X^2)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = X^4 + 2X^3$ par $B = X^3 + X^2 - X - 1$.
On a $X^4 + 2X^3 = (X + 1) \times B + 2X + 1$ avec $\deg(2X + 1) = 1 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(X^2) = 2X + 1$.
En écrivant en colonne les coordonnées de $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ dans la base canonique, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ a pour matrice } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base canonique.}}$$

Q32. Calculons le polynôme caractéristique de M.
On a par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ puis développement par rapport à la première colonne :

$$\chi_M = \det(XI_3 - M) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -2 & X-1 & -2 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & -2 \\ -1-X & -1 & X \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & -2 \\ 0 & -2 & X-1 \end{vmatrix}$$

d'où $\chi_M = (X+1)((X-1)^2 - 2^2) = (X+1)(X-3)(X+1) = (X+1)^2(X-3)$.
On en déduit que $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 3\}$. Déterminons $E_{-1}(M)$ et $E_3(M)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$(M + I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ x = -y - z \right.$$

On en déduit que $E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{C}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Comme 3 est un valeur propre simple, on sait que $\dim(E_3(M)) = 1$. Il suffit donc de trouver un vecteur non nul de $E_3(M)$ pour obtenir une base.

On a $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et on constate que $(M - 3I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$.

On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_3(M)$.

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 3\},\ E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_3(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

Q33. Précisons que la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_{-1}(M)$ car elle est génératrice de $E_{-1}(M)$ et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.
Comme M est la matrice de φ dans la base canonique, on en déduit par les relations vectoriel/matriciel que $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-1, 3\}$, $(-1+X, -1+X^2)$ est une base de $E_{-1}(\varphi)$ et $(1+2X+X^2)$ est une base de $E_3(\varphi)$.
Comme $\dim(E_{-1}(\varphi)) + \dim(E_3(\varphi)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{C}_2[X])$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable.}}$$

On a donc $\mathbb{C}_2[X] = E_{-1}(\varphi) \oplus E_3(\varphi)$. Ainsi, en concaténant les bases de $E_{-1}(\varphi)$ et $E_3(\varphi)$ obtenues, on obtient que :

$$\boxed{(-1 + X, -1 + X^2, 1 + 2X + X^2) \text{ est une base de } \mathbb{C}_2[X] \text{ formée de vecteurs propres de } \varphi.}$$

Q34. Par définition, $\varphi(1)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ par $B = X^3$.
On a $\alpha + \beta X + \gamma X^2 = 0 \times B + \alpha + \beta X + \gamma X^2$ avec $\deg(\alpha + \beta X + \gamma X^2) \leqslant 2 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.
Par définition, $\varphi(X)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3$ par $B = X^3$.
On a $\alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = \gamma \times B + \alpha X + \beta X^2$ avec $\deg(\alpha X + \beta X^2) \leqslant 2 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$.
Par définition, $\varphi(X^2)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4$ par $B = X^3$.

On a $\alpha X^2+\beta X^3+\gamma X^4=(\beta+\gamma X)\times B+\alpha X^2$ avec $\deg(\alpha X^2)\leqslant 2<3=\deg(B)$ donc $\varphi(X^2)=\alpha X^2$.
En écrivant en colonne les coordonnées de $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ dans la base canonique, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ a pour matrice } T=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ \beta & \alpha & 0\\ \gamma & \beta & \alpha\end{pmatrix} \text{ dans la base canonique.}}$$

Q35. Si le polynôme A est constant alors $\beta=\gamma=0$ donc $T=\alpha I_3$. La matrice de φ dans la base canonique étant diagonale, on en déduit que l'endomorphisme φ est diagonalisable.
Si l'endomorphisme φ est diagonalisable alors la matrice T est aussi diagonalisable. Ainsi, il existe $P\in\mathscr{G}L_3(\mathbb{C})$ et $D\in\mathscr{M}_3(\mathbb{C}]$ diagonale telles que $T=PDP^{-1}$. Comme T et D sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique donc $\chi_D=\chi_T=(X-\alpha)^3$ (matrice triangulaire). On en déduit que nécessairement, $D=3I_3$ et donc $T=P(\alpha I_3)P^{-1}=\alpha I_3$. Ainsi, $\beta=\gamma=0$ et le polynôme A est donc constant.
On a donc démontré l'équivalence :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable si et seulement si le polynôme } A \text{ est constant.}}$$

Q36. On a d'après le cours :

$$\boxed{\forall (k,j)\in[\![0,n]\!],\ L_k(x_j)=\begin{cases}1 & \text{si } j=k\\ 0 & \text{si } j\neq k.\end{cases}}$$

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{C}_n[X],\ P=\sum_{j=0}^{n}P(x_j)L_j \text{ donc les coordonnées de } P \text{ dans la base } (L_0,\dots,L_n) \text{ sont } P(x_0),\dots,P(x_n).}$$

Q37. Par définition de Q_k et R_k, on a $AL_k=BQ_k+R_k$.
En évaluant en x_j, on a donc $A(x_j)L_k(x_j)=B(x_j)Q_k(x_j)+R_k(x_j)$.
Comme x_j est une racine de B, on a $B(x_j)=0$ et $L_k(x_j)=\begin{cases}1 & \text{si } j=k\\ 0 & \text{si } j\neq k.\end{cases}$
Ainsi, si $j\neq k$ alors l'égalité devient $0=0+R_k(x_j)$ et si $j=k$ alors elle devient $A(x_k)=0+R_k(x_k)$.
D'où :

$$\boxed{R_k(x_j)=0 \text{ si } j\neq k \text{ et } R_k(x_k)=A(x_k).}$$

Q38. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Par définition, on a $\varphi(L_k)=R_k$.
Or, comme $R_k\in\mathbb{C}_n[X]$, on a d'après la question 36 :

$$R_k=\sum_{j=0}^{n}R_k(x_j)L_j=\underbrace{R_k(x_k)}_{=A(x_k)}L_k+\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\underbrace{R_k(x_j)}_{=0}L_j=A(x_k)L_k.$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi(L_k)=A(x_k)L_k.}$$

Q39. On a pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\varphi(L_k)=A(x_k)L_k$ et L_k n'est pas le polynôme nul donc L_k est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $A(x_k)$.
On en déduit que $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ donc

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les complexes } A(x_k) \text{ pour } k\in[\![0,n]\!].}$$