CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 3 - Sujet 2

PROBLÈME 1 - AUTOUR DES MATRICES DE TOEPLITZ (extrait Centrale PSI 2018)

I. Généralités et quelques exemples

I.A. Généralités

Q1. Pour tout $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, notons D_k la matrice de Tœplitz $T(t_{-n+1}, ..., t_{n-1})$ où $t_k = 1$ et pour tout $i \in [\![-(n-1), n-1]\!] \setminus \{k\}$, $t_i = 0$.
On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) &= \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1},\ M = \sum_{k=-n+1}^{n-1} t_k D_k\} \\ &= \mathrm{Vect}(D_{-n+1}, \ldots, D_{n-1}).\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ et $(D_{-n+1}, \ldots, D_{n-1})$ en est une famille génératrice.

De plus, cette famille est libre car s'il existe $(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$ tel que $\sum_{k=-n+1}^{n-1} t_k D_k = 0_n$ alors on a $T(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) = 0_n$ donc en regardant la première colonne et la première ligne de la matrice, on en déduit que pour tout $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, $t_k = 0$.
On en déduit que $\boxed{(D_{-n+1}, \ldots, D_{n-1}) \text{ est une base de } \mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})}$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{Card}(D_{-n+1}, \ldots, D_{n-1}) = n - 1 - (-n + 1) + 1$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})) = 2n - 1.}$

Q2. On suppose que A et B sont deux matrices qui commutent.
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Notons $P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ où $d \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$.
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = BA^k$.
C'est vrai pour $k = 0$ car $A^0 B = I_n B = B = BI_n = BA^0$ et si $k \in \mathbb{N}$ vérifie $A^k B = BA^k$ alors $A^{k+1} B = A(A^k B) = A(BA^k) = (AB)A^k = (BA)A^k = BA^{k+1}$.
On a alors :

$$P(A)B = \left(\sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k\right) B = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k (A^k B) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k (BA^k) = B \left(\sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k\right) = BP(A).$$

On a ainsi prouvé que si A et B commutent alors tout polynôme en A commute avec B.
Appliquons ce résultat avec B et $P(A)$ (qui commutent) : tout polynôme en B commute avec $P(A)$ donc $Q(B)$ et $P(A)$ commutent.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent alors tout polynôme en } A \text{ commute avec tout polynôme en } B.}$$

I.B. Cas de la dimension 2

Q3. Comme il s'agit d'une matrice 2×2, on a directement :

$$\boxed{\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2aX + a^2 - bc.}$$

Q4. Le polynôme χ_A est un polynôme de degré 2 qui a pour discriminant $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 - bc) = 4bc$.
⋆ Si $bc \neq 0$ alors χ_A admet deux racines complexes distinctes donc χ_A est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ à racines

simples, donc la matrice A est diagonalisable.
⋆ Si $bc = 0$ alors χ_A admet une racine double qui vaut a.
On sait alors que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_a) = 2$ c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Ker}(A - aI_2) = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ c'est-à-dire si et seulement si $A = aI_2$.
Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si $b = c = 0$.
On en conclut que :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable si et seulement si } b \text{ et } c \text{ sont tous les deux non nuls ou tous les deux nuls.}}$$

Q5. On sait que le polynôme caractéristique est de degré 2 et il est scindé sur $\mathbb{C}$.
⋆ Si χ_M admet deux valeurs propres α et β distinctes alors la matrice M est diagonalisable et donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
⋆ Si χ_M admet une valeur propre double α alors comme χ_M est scindé, M est trigonalisable et donc semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ (on trouve deux fois α sur la diagonale car M et cette matrice ont le même polynôme caractéristique puisqu'elles sont semblables).

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de type } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3,\ \alpha \neq \beta.}$$

Q6. Par la question précédente et par transitivité de la relation de similitude, il suffit de prouver que toute matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta$ et toute matrice du type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de Tœplitz.
C'est évident pour la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ car il s'agit d'une matrice de Tœplitz : $T(0, \alpha, \gamma)$.
Montrons que $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, où $\alpha \neq \beta$, est semblable une matrice de Tœplitz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.
Analyse : Si ces deux matrices sont semblables alors elles sont la même trace donc $2a = \alpha + \beta$ donc $a = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Elles sont aussi le même déterminant donc $a^2 - bc = \alpha\beta$ donc $bc = \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta$.
Synthèse : Considérons la matrice de Toeplitz $T = T\left(1, \dfrac{\alpha + \beta}{2}, \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha + \beta}{2} & \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta \\ 1 & \dfrac{\alpha + \beta}{2} \end{pmatrix}$.
On a $\chi_T = X^2 - \mathrm{tr}(T)X + \det(T) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta = (X - \alpha)(X - \beta)$.
Comme $\alpha \neq \beta$, le polynôme χ_T est scindé à racines simples donc T est diagonalisable et donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ puisque $\mathrm{Sp}(T) = \{\alpha, \beta\}$.
On a donc prouvé que :

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de Tœplitz.}}$$

I.C. Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Q7. Comme X est un vecteur propre de $A_n(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ, on a l'égalité matricielle $A_n(a, b, c)X = \lambda X$.
Écrivons cette égalité de deux matrices colonnes cœfficient par cœfficient.
- Pour le cœfficient de la première ligne : on a $ax_1 + bx_2 = \lambda x_1$ donc $bx_2 + (a - \lambda_1)x_1 + cx_0 = 0$ en posant $x_0 = 0$.
- Pour les cœfficients de la ligne numéro $k+1$ pour k allant de 1 à $n-2$: on a $cx_k + ax_{k+1} + bx_{x+2} = \lambda x_{k+1}$ donc $bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$.
- Pour le cœfficient de la dernière ligne : on a $cx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n$ donc $bx_{n+1} + (a - \lambda)x_n + cx_{n-1} = 0$ en

posant $x_{n+1} = 0$.
On a donc ainsi obtenu pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$.
On peut alors étendre la famille finie $(x_0, \dots, x_{n+1})$ en une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence souhaitée, en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n$, $x_{k+2} = \dfrac{1}{b}((\lambda - a)x_{k+1} - cx_k)$ (on a bien $b \neq 0$ puisque $bc \neq 0$).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En posant } x_0 = x_{n+1} = 0,\ (x_1, \dots, x_n) \text{ sont les termes d'une suite } (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ vérifiant pour tout } k \in \mathbb{N} : \\ bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0.\end{array}}$$

Q8. La relation $(I.1)$ est l'équation caractéristique de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ récurrente linéaire d'ordre 2 (on a $b \neq 0$).
On sait alors d'après le cours que :
- $\boxed{\text{si elle possède deux racines complexes distinctes } r_1 \text{ et } r_2}$ alors il existe deux constantes complexes A et B telles que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ x_k = Ar_1^k + Br_2^k}$,
- $\boxed{\text{si elle possède une unique racine double } r_0}$ alors il existe deux constantes complexes A et B telles que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ x_k = (Ak+B)r_0^k}$.

Q9. Raisonnons par l'absurde en supposant que l'équation $(I.1)$ admet une unique solution r_0. Comme $c \neq 0$, on remarque que 0 n'est pas solution de $(I.1)$ donc $r_0 \neq 0$.
Par la question précédente, on sait qu'il existe alors deux constantes complexes A et B telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = (Ak+B)r_0^k$.
Comme $x_0 = 0$, on obtient $B = 0$ et comme $x_{n+1} = 0$, on obtient $(n+1)Ar_0^{n+1} = 0$ d'où $A = 0$ puisque $r_0 \neq 0$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = 0$ donc en particulier, $X = 0_{n,1}$, ce qui est absurde car il s'agit d'un vecteur propre.
Ainsi :

$$\boxed{\text{L'équation } (I.1) \text{ possède deux solutions distinctes } r_1 \text{ et } r_2.}$$

Q10. Comme vu à la question précédente, 0 n'est pas une racine de $(I.1)$ donc $\boxed{r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont non nuls}}$.
Par la question 8, il existe deux constantes complexes A et B telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = Ar_1^k + Br_2^k$.
Comme $x_0 = 0$, on a $B = -A$ et comme $x_{n+1} = 0$, on a $A(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0$.
Or, A ne peut pas être nul car sinon, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ serait la suite nulle et on aurait $X = 0_{n,1}$, ce qui n'est pas possible en tant que vecteur propre.
On en déduit que $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$ d'où $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\frac{r_1}{r_2} \text{ appartient à } \mathbb{U}_{n+1}.}$$

Q11. On utilise les relations cœfficients/racines que l'on peut retrouver comme suit. On a :

$$bX^2 + (a-\lambda)X + c = b(X-r_1)(X-r_2) = bX^2 - b(r_1+r_2)X + br_1r_2.$$

Par unicité des cœfficients dans la base canonique, on obtient (puisque $b \neq 0$) :

$$\boxed{r_1r_2 = \frac{c}{b} \text{ et } r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b}.}$$

Comme $\dfrac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$, il existe $\ell \in [\![0, n]\!]$ tel que $\dfrac{r_1}{r_2} = e^{2i\ell\pi/(n+1)}$.
Remarquons que $\ell \neq 0$ car sinon, on aurait $\dfrac{r_1}{r_2} = 1$ donc $r_1 = r_2$, impossible par la question 9.

On a alors :

$$\begin{aligned}\lambda &= a + b(r_1 + r_2) = a + br_2\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)\\ &= a + br_2\left(e^{2i\ell\pi/(n+1)} + 1\right) = a + br_2 e^{i\ell\pi/(n+1)}\left(e^{i\ell\pi/(n+1)} + e^{-i\ell\pi/(n+1)}\right)\\ &= a + 2br_2 e^{i\ell\pi/(n+1)}\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)\end{aligned}$$

en posant $\rho = br_2 e^{i\ell\pi/(n+1)}$.
On a de plus $\rho^2 = b^2 r_2^2 e^{2i\ell\pi/(n+1)} = b^2 r_2^2 \dfrac{r_1}{r_2} = b^2 r_1 r_2 = b^2 \dfrac{c}{b} = bc$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe } \ell \in [\![1, n+1]\!] \text{ et } \rho \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } \rho^2 = bc \text{ tels que } \lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right).}$$

Q12. Avec les notations précédentes, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}x_k &= A(r_1^k - r_2^k) = Ar_2^k\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k - 1\right) = Ar_2^k(e^{2i\ell k\pi/(n+1)} + 1)\\ &= Ar_2^k e^{i\ell k\pi/(n+1)}\left(e^{i\ell k\pi/(n+1)} - e^{-i\ell k\pi/(n+1)}\right) = 2iAr_2^k e^{i\ell k\pi/(n+1)}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\\ &= 2iA\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right) \text{ car } r_2 e^{i\ell\pi/(n+1)} = \frac{\rho}{b}.\end{aligned}$$

Ainsi (en renommant la constante A en α), on a montré que :

$$\boxed{\text{il existe } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que pour tout } k \in [\![0, n+1]\!],\ x_k = 2i\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right).}$$

Q13. Il s'agit de faire la synthèse. Soit ρ une racine complexe de bc.
Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. On pose $\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$.
On veut montrer que λ_ℓ est une valeur propre de $A_n(a, b, c)$.
Pour cela, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 2i\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.
On a $X \neq 0_{n,1}$ car $x_1 = 2i\dfrac{\rho}{b}\sin\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right) \neq 0$ ($\rho \neq 0$ puisque $bc \neq 0$ et $\sin\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right) \neq 0$ car $\dfrac{\ell\pi}{n+1} \in]0, \pi[$).
Montrons qu'on a $A_n(a, b, c)X = \lambda_\ell X$.
Avec $x_0 = x_{n+1} = 0$, cela est équivalent à prouver que :

$$\text{pour tout } k \in [\![0, n-1]\!],\ bx_{k+2} + (a - \lambda_\ell)x_{k+1} + cx_k = 0.$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}bx_{k+2} + (a - \lambda_\ell)x_{k+1} + cx_k &= b2i\frac{\rho^{k+2}}{b^{k+2}}\sin\left(\frac{\ell(k+2)\pi}{n+1}\right) - 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)2i\frac{\rho^{k+1}}{b^{k+1}}\sin\left(\frac{\ell(k+1)\pi}{n+1}\right) + c2i\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\\ &= 2i\frac{\rho^k}{b^k}\left(\frac{\rho^2}{b}\sin\left(\frac{\ell(k+2)\pi}{n+1}\right) - 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)\frac{\rho}{b}\sin\left(\frac{\ell(k+1)\pi}{n+1}\right) + c\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\right)\\ &= 2ic\frac{\rho^k}{b^k}\left(\sin\left(\frac{\ell(k+2)\pi}{n+1}\right) - 2\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\ell(k+1)\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

car $\rho^2 = bc$.
Par la formule de trigonométrie $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$, l'expression entre parenthèses est nulle. D'où le résultat.

Ainsi, pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$ est une valeur propre de $A_n(a,b,c)$.
On a ainsi déterminé n valeurs propres distinctes (car $\rho \neq 0$ et pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\ell\pi}{n+1} \in]0,\pi[$, la fonction cosinus est injective sur $]0,\pi[$) et $A_n(a,b,c)$ est une matrice de taille $n \times n$.
On en déduit que :

$$\boxed{A_n(a,b,c) \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les complexes } a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \text{ pour } \ell \in [\![1,n]\!].}$$

II. Matrices circulantes

Q14. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M_n.
Si on note $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a donc :

$$f(e_1) = e_n \text{ et pour tout } k \in [\![2,n]\!],\ f(e_k) = e_{k-1}.$$

En appliquant f, on a donc :

$$f^2(e_1) = f(e_n) = e_{n-1},\ f^2(e_2) = f(e_1) = e_n \text{ et pour tout } k \in [\![3,n]\!],\ f^2(e_k) = f(e_{k-1}) = e_{k-2}.$$

Comme la matrice M_n^2 est la matrice de f^2 dans la base canonique, on en déduit que :

$$M_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

En réitérant le processus, on se rend compte que « les diagonales remontent » jusqu'à obtenir l'identité.

$$\boxed{M_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ M_n^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_n^n = \mathrm{I}_n.}$$

On a donc $M_n \times M_n^{n-1} = I_n$ donc $\boxed{M_n \text{ est inversible}}$ et $M_n^{-1} = M_n^{n-1}$.
En posant $P = X^n - 1$, on a $P(M_n) = M_n^n - I_n = 0_n$ donc :

$$\boxed{P = X^n - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } M_n.}$$

Q15. Les racines complexes de P sont les racines n-èmes de l'unité c'est-à-dire les complexes ω_n^k pour $k \in [\![0,n-1]\!]$.
On en déduit que le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples donc la matrice $\boxed{M_n \text{ est diagonalisable.}}$
On sait de plus que $\mathrm{Sp}(M_n) \subset \mathbb{U}_n = \{\omega_n^k,\ k \in [\![0,n-1]\!]\}$.
On peut facilement calculer le polynôme caractéristique de la matrice M_n. En effet, en développant le déterminant de la matrice $XI_n - M_n$ par rapport à la première colonne, on obtient des déterminants de matrices triangulaires qui valent donc le produit de leurs $n-1$ cœfficients diagonaux, ce qui donne l'égalité suivante :

$$\chi_M = X \times X^{n-1} + (-1)^{n+1} \times 1 \times (-1)^{n-1} = X^n - 1.$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp}(M_n) = \mathbb{U}_n = \{\omega_n^k,\ k \in [\![0,n-1]\!]\}}$ et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Il suffit donc de trouver un vecteur non nul de chaque sous-espace propre pour en obtenir une base.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Posons $\boxed{X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}}$.

On a $X \neq 0_{n,1}$ et on constate que $(M_n - \omega_n^k I_n)X_k = 0_{n,1}$ car $\omega_n^n = 1$.
Ainsi, (X_k) est une base du sous-espace propre associé à la valeur propre ω_n^k.
Comme M_n est diagonalisable, ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En concaténant les bases des sous-espaces propres obtenues, on en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{B} = (X_0, \dots, X_{n-1}) \text{ est une base de vecteurs propres de } M_n.}$$

Q16. Par définition, les colonnes de Φ_n sont $X_0, \dots, X_n$.
Ainsi, Φ_n est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathscr{B}$ donc $\boxed{\Phi_n \text{ est inversible.}}$
De plus, par les formules de changement de base, $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n$ est la matrice de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à la matrice M_n, dans la base $\mathscr{B}$.
Comme $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de M_n, cette matrice est diagonale et on a plus précisément :

$$\boxed{\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \omega_n^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}}.$$

Q17. Comme A est une matrice circulante, il existe $(t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que :

$$A = T(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = t_0 I_n + t_1 M_n + t_2 M_n^2 + \dots + t_{n-1} M_n^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k$$

d'après les calculs des puissances de M_n effectués à la question 14. Ainsi :

$$\boxed{\text{en posant } P = \sum_{k=0}^{n-1} t_k X^k, \text{ on a } P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } A = P(M).}$$

Q18. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
Effectuons la division euclidienne de P par $X^n - 1$. Il existe deux polynômes Q et R de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P = (X^n - 1)Q + R$ et $\deg(R) < n$.
On a donc $P(M_n) = (M_n^n - I_n)Q(M_n) + R(M_n) = R(M_n)$ car $M_n^n - I_n = 0_n$.
Or, il existe $(t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $R = \sum_{k=0}^{n-1} t_k X^k$ et on a donc comme constaté précédemment :

$$R(M_n) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k = T(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$$

donc $R(M_n)$ est une matrice circulante.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si } P \in \mathbb{C}[X] \text{ alors } P(M_n) \text{ est une matrice circulante.}}$$

Q19. Notons $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des matrices circulantes. C'est par définition un sous-ensemble de $\text{Tœp}_n(\mathbb{C})$.
Par ce qui précède, on a également :

$$\mathscr{C}_n = \{P(M_n),\ P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

En prenant pour P le polynôme nul, on montre que $0_n \in \mathscr{C}_n$.
Si A et B sont deux éléments de $\mathscr{C}_n$ alors il existe $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$ tel que $A = P(M_n)$ et $B = Q(M_n)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a alors $\lambda A + B = (\lambda P + Q)(M_n)$ avec $\lambda P + Q \in \mathbb{C}[X]$ donc $\lambda A + B \in \mathscr{C}_n$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\mathscr{C}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \text{Tœp}_n(\mathbb{C}).}$$

De plus, $AB = P(M_n)Q(M_n) = (PQ)(M_n)$ avec $PQ \in \mathbb{C}[X]$ donc $AB \in \mathscr{C}_n$.
On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{C}_n \text{ est stable par produit.}}$$

On a enfin :

$$A^\top = (P(M_n))^\top = P(M_n^\top)$$

par linéarité de la transposition et parce que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_n^k)^\top = (M_n^\top)^k$.
Or, $M_n^\top = M_n^{n-1}$ donc $A^\top = P(M_n^{n-1})$.
En posant $R = P(X^{n-1})$, on a donc $R \in \mathbb{C}[X]$ et $A^\top = R(M_n)$ donc par la question 18, $A^\top \in \mathscr{C}_n$.
Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{C}_n \text{ est stable par transposition.}}$$

Q20. Soit A une matrice circulante. Par la question 17, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.
En reprenant les notations précédentes, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $M_n X_k = \omega_n^k X_k$ donc (par le cours) $P(M_n)X_k = P(\omega_n^k)X_k$ et $X_k \neq 0_{n,1}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la famille } (X_0, \ldots, X_{n-1}) \text{ est aussi une base de vecteurs propres de } A.}$$

Ainsi :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les } P(\omega_n^k) \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!].}$$

Problème 2 - Autour de la fonction Zéta (extrait Centrale PC 2018)

I. Fonction zêta

Q21. Soit $x \in \mathbb{R}$.
La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de la fonction } \zeta \text{ est } D_\zeta =]1, +\infty[.}$$

Q22. $\star$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ est continue sur $]1, +\infty[$.
$\star$ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 < a < b$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est positive et décroissante sur $[a, b]$ donc $\|f_n\|_\infty^{[a,b]} = \displaystyle\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{1}{n^a}$.
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ converge car $a > 1$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge.
Cela signifie que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$ donc elle converge uniformément sur $[a, b]$.
Par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que $\zeta_{|[a,b]}$ est continue sur $[a, b]$.
Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $]1, +\infty[$, on en déduit par le caractère local de la continuité que :

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est continue sur }]1,+\infty[.}$$

Q23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} e^{-x\ln n} = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}$.
Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ convergeait uniformément sur $]1,+\infty[$ alors par le théorème de la double limite, on en déduirait que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ converge, ce qui est absurde car il s'agit de la série harmonique.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]1,+\infty[.}$$

Q24. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 < x \leqslant y$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $f_n(x) \geqslant f_n(y)$ car la fonction f_n est décroissante sur $]1,+\infty[$.
Par somme (séries convergentes), on en déduit que $\zeta(x) \geqslant \zeta(y)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est décroissante sur }]1,+\infty[.}$$

Q25. ⋆ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\overbrace{\ln n}^{>0}} = 0$.
⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est positive et décroissante sur $[2,+\infty[$ donc $\|f_n\|_\infty^{[2,+\infty[} = f_n(2) = \dfrac{1}{n^2}$.
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty^{[2,+\infty[}$ converge.
Cela signifie que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[2,+\infty[$ donc elle converge uniformément sur $[2,+\infty[$.
On en déduit par le théorème de la double limite que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.}$$

Q26. Fixons $x \in]1,+\infty[$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^x}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^x} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^x}.$$

On a d'une part, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{(k+1)^x} = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^x}$ et d'autre part, $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-x+1}t^{-x+1}\right]_1^n = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - 1\right)$.
On a ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - 1 \leqslant \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - 1\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^x}.$$

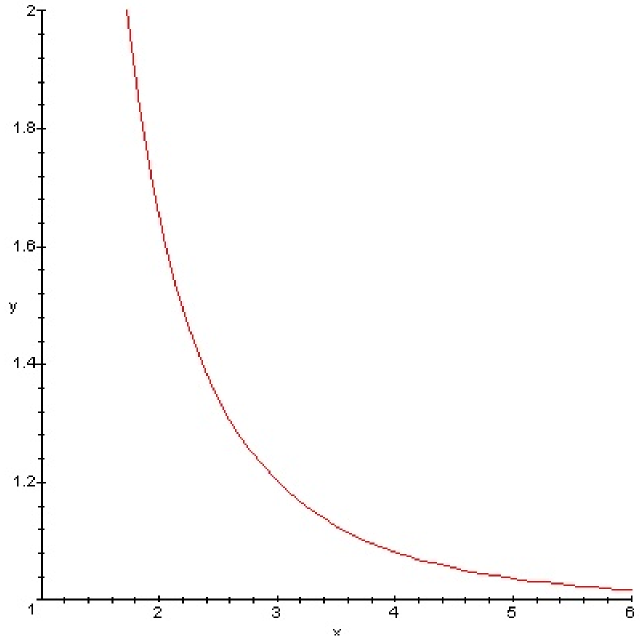
En faisant tendre n vers $+\infty$ (toutes les quantités en jeu convergent car $x > 1$, on obtient :

$$\zeta(x) - 1 \leqslant \frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \text{ d'où } \frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \frac{1}{x-1} + 1.$$

Comme $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, on a $\frac{1}{x-1} + 1 \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.
Par encadrement, on en déduit que :

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.}$$

Q27. On déduit notamment de la question précédente que $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.
Allure de la courbe représentative de la fonction ζ :



II. Étude d'une fonction définie par une somme

A. Ensemble de définition et variations

Q28. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g_n : x \mapsto \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$.
Par suite, la fonction f n'est pas définie aux points $-n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}^*\}$.
⋆ On a $|g_n(x)| = \frac{|x|}{n|x+n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}$.
⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|x|}{n^2} \geqslant 0$.
⋆ La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$) donc par linéarité, $\sum \frac{|x|}{n^2}$ converge aussi.
Par comparaison, on en déduit que la série $\sum g_n(x)$ converge absolument donc converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de la fonction } f \text{ est } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-n,\ n \in \mathbb{N}^*\}.}$$

Q29. Soit $x \in D_f$. On a bien $x+1 \in D_f$ et on a par linéarité :

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

par télescopage. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in D_f,\ f(x+1) = f(x) - \frac{1}{x+1}.}$$

Q30. Montrons tout d'abord que la fonction f est continue sur $]-1,+\infty[$.
$\star$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $]-1,+\infty[$ (en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$).
$\star$ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $-1 < a \leqslant b$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|g_n(x)| = \frac{|x|}{n(x+n)} \leqslant \frac{\max(|a|,|b|)}{n(n+a)} \text{ (car } n+x \geqslant n+a > 0\text{) et } \frac{\max(|a|,|b|}{n(n+a)} \text{ ne dépend pas de } x.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \|g_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \dfrac{\max(|a|,|b|)}{n(n+a)}$.
Or, on a $\dfrac{\max(|a|,|b|)}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\max(|a|,|b|)}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc on en déduit par comparaison par équivalent puis par inégalité que la série $\sum \|g_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge.
Cela signifie que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement sur $[a,b]$ donc elle converge uniformément sur $[a,b]$.
Par le théorème de continuité, on en déduit que $f_{|[a,b]}$ est continue sur $[a,b]$.
Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]-1,+\infty[$, f est donc continue sur $]-1,+\infty[$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur $]-n-1,-n[$.
Initialisation : $n = 1$
Comme f est continue sur $]-1,0[$, par composition, la fonction $x \mapsto f(x+1)$ est continue sur $]-2,-1[$ et $x \mapsto \dfrac{-1}{x+1}$ est continue sur $]-2,-1[$ donc par somme en utilisant la question précédente, on obtient que f est continue sur $]-2,-1[$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est continue sur $]-n-1,-n[$.
Montrons que f est continue sur $]-n-2,-n-1[$.
Comme f est continue sur $]-n-1,-n[$, par composition, la fonction $x \mapsto f(x+1)$ est continue sur $]-n-2,-n-1[$ et $x \mapsto \dfrac{-1}{x+1}$ est continue sur $]-n-2,-n-1[$ donc par somme en utilisant la question précédente, on obtient que f est continue sur $]-n-2,-n-1[$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur $]-n-1,n[$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } D_f.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n}$ est décroissante sur $]-1,+\infty[$ et sur les intervalles du type $]-k-1,-k[$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Par somme, on en déduit (même preuve qu'en question 24) que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est décroissante sur }]-1,+\infty[\text{ et sur les intervalles du type }]-k-1,-k[\text{ pour } k \in \mathbb{N}^*.}$$

B. Équivalents

Q31. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$.
Initialisation : $k = 1$
D'après la question 29, on a $f(1) = f(0) - 1 = 0 - 1 = -1 = -\displaystyle\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n}$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f(k) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$.
D'après la question 29, on a $f(k+1) = f(k) - \dfrac{1}{k+1} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \frac{1}{k+1} = -\sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{n}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) = -\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}.}$$

Q32. Utilisons une comparaison série-intégrale.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. En sommant ces inégalités pour n allant de 1 à $k-1$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n+1} \leqslant \int_1^k \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n}.$$

On a d'une part, $\displaystyle\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n}$ et d'autre part, $\displaystyle\int_1^k \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln|t|]_1^k = \ln k$.

On a ainsi :

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - 1 \leqslant \ln k \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \frac{1}{k} \ \text{ donc } \ \ln k + \frac{1}{k} \leqslant -f(k) \leqslant \ln k + 1 \ \text{ d'où } \ -\ln k - 1 \leqslant f(k) \leqslant -\ln k - \frac{1}{k} \leqslant -\ln k.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x \geqslant 2$. Notons k la partie entière de x. On a $2 \leqslant k \leqslant x < k+1$.

Comme f est décroissante sur $]-1, +\infty[$ et avec les inégalités précédemment établies, on a :

$$-\ln(x+1) - 1 \leqslant -\ln(k+1) - 1 \leqslant f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k) \leqslant -\ln(k) \leqslant -\ln(x-1).$$

Or, $-\ln(x-1) = -\ln x - \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x$ et $-\ln(x+1) + 1 = -\ln x - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x$.

On en déduit par encadrement que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x.}$$

Q33. Montrons la contraposée.

Si $x + k \notin D_f$ alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x + k = -n$ et donc $x = -n - k = -(n+k)$ avec $n + k \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $x \notin D_f$.

On a donc bien :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in D_f,\ x + k \in D_f.}$$

Soit $x \in D_f$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(x+k) - f(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+x}$.

Initialisation : $k = 1$

D'après la question 29, on a $f(x+1) - f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f(x+k) - f(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+x}$.

On a alors en appliquant la question 29 avec $x + k \in D_f$ puis en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$f(x+1+k) - f(x) = f(x+k) - \frac{1}{x+k+1} - f(x) = -\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+x} - \frac{1}{x+k+1} = -\sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{n+x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in D_f, \text{ on a } f(x+k) - f(x) = -\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+x}.}$$

Q34. Pour tout $x \in D_f$, on a $f(x) = f(x+k) + \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+x} = f(x+k) + \frac{1}{x+k} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n+x}$ donc on a :

$$(x+k)f(x) = 1 + (x+k)f(x+k) + (x+k)\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n+x}.$$

Par continuité de f en 0, on a $\lim\limits_{x\to -k} f(x+k) = f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n+x} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n-k}$ (limite finie).
On en déduit que $\lim\limits_{x\to -k} (x+k)f(x) = 1$ donc :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to -k}{\sim} \frac{1}{x+k}.}$$

Comme $\lim\limits_{x\to -k^+} \frac{1}{x+k} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -k^-} \frac{1}{x+k} = -\infty$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to -k^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to -k^-} f(x) = -\infty.}$$

B. Écriture de f à l'aide de la fonction zêta

Q35. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $\lim\limits_{k\to +\infty} \zeta(k+1) = 1$ d'après la question 25.

On en déduit que $\lim\limits_{k\to +\infty} |(-1)^k \zeta(k+1)x^k| = \lim\limits_{k\to +\infty} \zeta(k+1)|x|^k = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 1 & \text{si } |x| = 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

Ainsi, si $|x| \geqslant 1$ alors la suite $((-1)^k \zeta(k+1)x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum (-1)^k \zeta(k+1)x^k$ diverge grossièrement.
On considère désormais le cas $|x| < 1$.
On a $|(-1)^k \zeta(k+1)x^k| \underset{k\to +\infty}{\sim} |x|^k$ et la série géométrique $\sum\limits_{k\geqslant 1} |x|^k$ est une série à termes positifs et convergente donc par comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\sum (-1)^k \zeta(k+1)x^k$ converge absolument donc converge.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est définie sur } D_\varphi =]-1,1[.}$$

Q36. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $g_n : x \mapsto \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f (en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur D_f).
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in D_f$, on a $g_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}$.
Initialisation : $k = 1$
Pour tout $x \in D_f$, on a $g_n'(x) = -\frac{1}{(n+x)^2}$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $x \in D_f$, on a $g_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}$.
En dérivant, on obtient pour tout $x \in D_f$:

$$g_n^{(k+1)}(x) = (g_n^{(k)})'(x) = (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(n+x)^{k+2}} = (-1)^{k+1}(k+1)! \frac{1}{(n+x)^{k+2}}.$$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in D_f$, $g_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}$.

Montrons alors que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f.
⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f.
⋆ La série $\sum g_n$ converge simplement sur D_f.
⋆ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $-1 < a \leqslant b$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|g_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}} \text{ car } n+x \geqslant n+a > n-1 \geqslant 0.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \|g_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}.$$

Comme $\dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k!}{n^{k+1}}$ avec $k+1>1$, on en déduit par comparaison par équivalent que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ converge puis par comparaison par inégalité que la série $\sum_{n\geqslant 1} \|g_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]}$ converge.
Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$.
Par le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$, on en déduit que $f_{|[a,b]}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et on peut dériver terme à terme sur $[a,b]$.
Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]-1,+\infty[$, on en déduit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et on peut dériver terme à terme.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrons que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-m-1,-m[$.
$\star$ Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $-m-1 < a \leqslant b < -m$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant m+1$, pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|g_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}} \text{ car } n+x \geqslant n+a > n-m-1 \geqslant 0.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant m+1$:

$$0 \leqslant \|g_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}.$$

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant m+1} \|g_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]}$ converge donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant m+1} g_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$.
Par suite, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a,b]$.
Par le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$, on en déduit que $f_{|[a,b]}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et on peut dériver terme à terme sur $[a,b]$.
Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]-m-1,-m[$, on en déduit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-m-1,-m[$ et on peut dériver terme à terme.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } D_f \text{ et on a pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } x \in D_f : \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}.}$$

Q37. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|(-1)^k k! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right| = k! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}} \quad \text{(car pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ n+x>0)$$

$$= k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right) \leqslant k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}\right)$$

(car $\forall n \geqslant 2$, $n+x \geqslant n-1 \geqslant 1$ donc $(n+x)^{k+1} \geqslant (n+x)^2 \geqslant (n-1)^2 > 0$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)^2}$ converge)

$$= k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) = k!\left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right) \text{ en posant } A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{(ne dépend ni de } k\text{, ni de } x).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe } A \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[,\ |f^{(k)}(x)| \leqslant k!\left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right).}$$

Q38. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{k+1}} \right) x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \zeta(k+1) x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \zeta(k+1) x^k \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \\
&\leqslant \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} \frac{|x-t|^n}{n!} (n+1)! \left(A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}} \right) \mathrm{d}t \\
&\leqslant A \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} (n+1)|x-t|^n \mathrm{d}t + \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} (n+1) \frac{|x-t|^n}{(t+1)^{n+2}} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Détaillons le cas $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \zeta(k+1) x^k \right| &\leqslant A \int_0^x (n+1)(x-t)^n \mathrm{d}t + \int_0^x (n+1) \frac{(x-t)^n}{(t+1)^{n+2}} \mathrm{d}t \\
&= A \left[-(x-t)^{n+1} \right]_0^x + \int_0^x (n+1) \frac{1}{(1+t)^2} \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n \mathrm{d}t \\
&= A x^{n+1} + \int_0^x (n+1) \frac{1}{(1+t)^2} \left(\frac{1+x}{1+t} - 1 \right)^n \mathrm{d}t \\
&= A x^{n+1} + \left[-\frac{1}{1+x} \left(\frac{1+x}{1+t} - 1 \right)^{n+1} \right]_0^x \quad \text{(intégrande de la forme } u'u^n\text{)} \\
&= A x^{n+1} + \frac{1}{x+1} x^{n+1} = \left(A + \frac{1}{1+x} \right) x^{n+1} \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } x \in [0,1[).
\end{aligned}$$

De même, le cas $x < 0$ donne :

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \zeta(k+1) x^k \right| &\leqslant A \int_x^0 (n+1)(t-x)^n \mathrm{d}t + \int_x^0 (n+1) \frac{(t-x)^n}{(t+1)^{n+2}} \mathrm{d}t \\
&= A(-x)^{n+1} + \frac{1}{x+1}(-x)^{n+1} = \left(A + \frac{1}{1+x} \right) (-x)^{n+1} \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } -x \in [0,1[).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \zeta(k+1) x^k \right) = 0$.

On a donc :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k.}$$