Devoir surveillé n ° 5

I Exercice (Tous)

II Exercice (Tous), dipôle et condensateur plan

On considère un doublet de charges $-q$ et $+q > 0$ placées sur l'axe Oz aux points de cote $z = -a/2$ et $z = +a/2$.

1. Définir l'approximation dipolaire et le moment dipolaire de ce doublet.

   Dans la suite on se place dans le cadre de l'approximation dipolaire.

2. Établir l'expression du potentiel créé par cette distribution en un point M quelconque de l'espace. On précisera le système de coordonnées utilisé (et un schéma ne peut pas faire de mal...)

3. En déduire le champ électrique créé en un point M, en un point M quelconque de l'espace.

   On considère maintenant un disque d'axe Oz et de rayon R qui porte une densité surfacique de moment dipolaire $\overrightarrow{p}_s = p_s \overrightarrow{e}_z$ ($p_s = \text{Cte} > 0$), telle qu'une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ du disque possède un moment dipolaire $\overrightarrow{\mathrm{d}p} = p_s \mathrm{d}S \overrightarrow{e}_z$.

4. En considérant comme surface élémentaire $\mathrm{d}S$ un anneau d'axe Oz, de rayon r, d'épaisseur $\mathrm{d}r$ exprimer le potentiel $\mathrm{d}V$ créé par $\mathrm{d}S$ en un point M de l'axe Oz, de cote $z > 0$ en fonction de p_s, r, $\mathrm{d}r$, z et ε_0.

5. En déduire le potentiel $V(z)$ en un point M quelconque (i.e. z de signe quelconque) de l'axe, puis le champ champ électrostatique en ce point.

   On veut utiliser le résultat précédent pour caractériser la variation du champ électrique sur l'axe d'un condensateur plan, constitué de deux armatures circulaire de rayon R et d'axe Oz. Les deux armatures parallèles sont distantes de e. L'une est dans le plan $z = -e/2$ et porte une densité surfacique de charge $-\sigma < 0$, l'autre dans le plan $z = +e/2$ et porte une densité surfacique de charge $+\sigma > 0$.

6. Exprimer p_s en fonction de e et σ pour pouvoir modéliser cette distribution comme dans les questions 4 et 5. Quelle est la condition que doit vérifier z pour qu'on puisse se placer dans l'approximation dipolaire ? On supposera cette condition vérifiée dans la suite.

7. Exprimer en fonction, entre autre, de σ le champ électrostatique en un point M de l'axe Oz du condensateur.

   On étudie maintenant deux cas limites.

8. On se place à R fixé et on prend $z \gg R$. Que devient le champ électrostatique ? Commenter.

9. On se place à z fixé et on fait tendre R vers l'infini. Que devient le champ électrostatique ? Qu'a-t-il de remarquable ? Que donne la comparaison de sa norme à $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$? Était-ce prévisible ?

Exercice III (Tous), magnétostatique

Un matériau supraconducteur remplit le demi-espace infini $x \geqslant 0$. Il est parcouru par des courants modélisés par une densité de courants électriques volumiques

$$\overrightarrow{j} = j(x)\overrightarrow{u}_y = j_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right)\overrightarrow{u}_y,$$

où j_0 et a sont des constantes positives.

1. Par une étude des symétries et des invariances déterminer la forme mathématique la plus précise possible de la forme du champ magnétique créé par ces courants en un point quelconque de l'espace.

2. Montrer que le champ magnétique est uniforme dans le demi-espace $x \leqslant 0$.

   Dans la suite on admet qu'il vaut $\overrightarrow{B} = \frac{1}{2}\mu_0 j_0 a \overrightarrow{u}_z$, où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

3. En considérant un contour rectangulaire pris dans un plan $y = \mathrm{Cte}$, dont un côté parallèle à Oz a pour longueur ℓ, et dont les côtés parallèles à Ox s'étendent entre x et $x + \mathrm{d}x$ ($x \geqslant 0$), établir que le champ B dans le supraconducteur vérifie une équation différentielle de la forme

   $$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\alpha} = -\mu_0 j(x),$$

   où α est une des trois coordonnées cartésiennes x, y ou z.

4. En déduire le champ magnétique dans le supraconducteur et tracer un graphe donnant les variations spatiales du champ magnétique.

   On va maintenant établir le résultat admis plus haut. Pour cela on considère un volume limité entre les plans $x = -b/2$ et $x = +b/2$, parcouru par une densité de courants électriques volumiques uniforme $\overrightarrow{j} = j_0\overrightarrow{u}_y$.

5. Déterminer le champ magnétique créé par cette distribution en tout point de l'espace.

6. En découpant le supraconducteur en des tranches élémentaires d'épaisseur $\mathrm{d}x$, retrouver par sommation que le champ créé dans le domaine $x \leqslant 0$ vaut $\overrightarrow{B} = \frac{1}{2}\mu_0 j_0 a \overrightarrow{u}_z$.

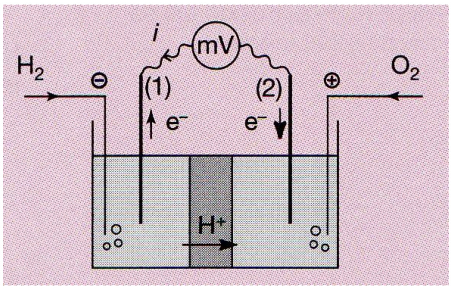
Exercice IV (MP* seulement)

IV.1 Aspect cinétique d'une pile à combustible

Dans de l'eau, en milieu acide, plongent deux électrodes de platine sur lesquelles arrivent les deux gaz H_2 et O_2. Une membrane de type polymère ne laisse passer que les protons.

Modélisation : $P(O_2) = 1$ bar ; $P(H_2) = 1$ bar ; $pH = 0$.

Données : $E^0(H^+/H_2) = 0{,}00$ V ; $E^0(O_2/H_2O) = 1{,}23$ V.



1. Décrire les phénomènes aux électrodes et déduire l'équation-bilan de fonctionnement.

2. Quelle est la f.é.m. prévue par la thermodynamique ?

   On obtient usuellement une tension de l'ordre de 0,7 V à 0,8 V.

3. L'interpréter en proposant des courbes intensité - potentiel.

IV.2 Pile au lithium métal

Les piles au lithium équipent de nombreux appareils électroniques modernes, notamment les téléphones portables et appareils photographiques. Ce type de pile est constitué d'une borne positive en dioxyde de manganèse MnO_2 et d'une borne négative en lithium. L'électrolyte est un sel de lithium ($LiPF_6$) dissout dans un solvant organique (carbonate de propylène) et concentré en ions Li^+ (milieu acide). Les couples électrochimiques concernés sont respectivement $MnO_2/MnO(OH)$ et Li^+/Li.

1. Écrire les réactions intervenant à chaque électrode, en précisant leur nature. En déduire la réaction globale de la pile.

2. Déterminer la quantité de matière de Li disponible, ainsi que le nombre n_e de moles d'électrons que peut transférer la pile. En déduire la quantité d'électricité Q (exprimée en C puis en A·h) qu'elle peut fournir.

3. Exprimer la capacité massique C_m, c'est-à-dire la quantité maximale d'électricité que peut débiter la pile par kilogramme de lithium. Positionner la capacité massique d'une pile au lithium par rapport à des piles pour lesquelles les capacités massiques (en A·h·kg^{-1}) s'élèvent à 480 (Cd), 500 (Zn) ou 820 (Ag).

4. Calculer l'autonomie, en années, de la pile.

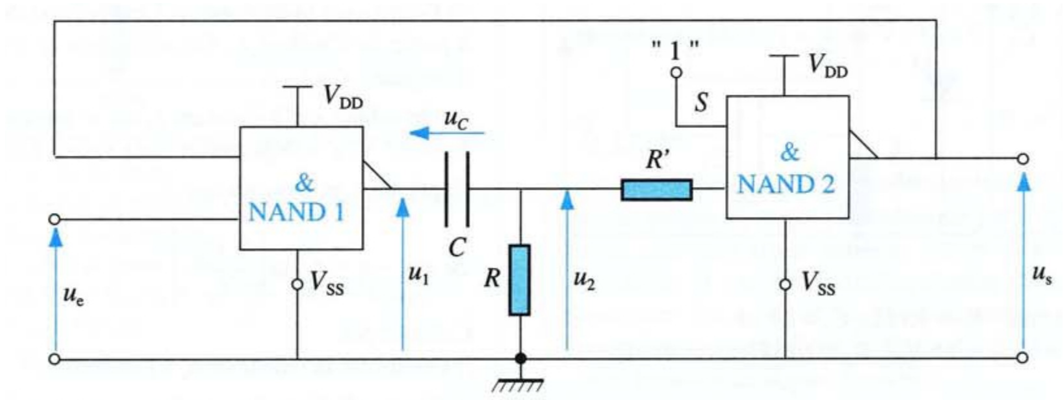
Données :

- Masse de l'électrode en lithium : $m = 2{,}0$ g.
- Masse molaire atomique du lithium : $M = 6{,}94$ g·mol^{-1}.
- Courant débité par la pile : $I = 0{,}10$ mA.
- Constante de Faraday : $\mathcal{F} = 96\,500$ C·mol^{-1} .

V Exercice (MPI* seulement)

On réalise le circuit monostable suivant avec des portes NAND (ne pas s'inquiéter des symbôles utilisés sur le schéma...). Le potentiel correspondant au niveau logique "0" est le potentiel nul, celui correspondant au niveau logique "1" est $V_{dd} = 10$ V. Un potentiel $V < V_{th} = 5$ V est considéré comme un niveau logique "0", et un potentiel $V > V_{th} = 5$ V est considéré comme un niveau logique "1". Les impédances des entrées des portes sont considérées comme infinies. On néglige les temps de commutation des portes.

Sur le schéma sont représentées les tensions d'alimentation V_{ss} et V_{dd} des portes. Elles n'interviennent en rien dans la compréhension du fonctionnement du circuit.



On donne $R = 15$ kΩ et $C = 100$ nF.

1. Déterminer les états stables pour $u_e = V_{dd}$. On précisera les valeurs des tensions u_2, u_s, u_1 et u_C.

2. Même question pour pour $u_e = 0$ V.

3. Pour $t < 0$, $u_e = V_{dd}$. À $t = 0$ on annule u_e pendant une très courte durée τ. Décrire le fonctionnement du circuit et tracer les chronogrammes correspondant aux tensions u_1, u_2 et u_s.

4. Déterminer la durée propre du monostable en fonction de R et C. Faire l'application numérique.

5. Que se passe-t-il si on porte la borne S au niveau logique "0".