

Corrigé du devoir surveillé n° 5

I Mines Ponts 2011 MP Partie I

I.A Mesure directe de la conductivité

- 1 Le flux de \vec{j} à travers un cylindre d'axe Az , de rayon r et d'épaisseur ε donne accès à l'intensité i d'où $2\pi r \varepsilon j(t) = i$, soit

$$\vec{j} = \frac{i}{2\pi r \varepsilon} \vec{e}_r$$

D'après la loi d'Ohm locale on a donc $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{i}{2\pi r \gamma \varepsilon} \vec{e}_r$. On en déduit le potentiel $V = -\frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln(r) + Cte$. La différence de potentiel demandée est donc

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

- 2 Pour l'autre fil on a de même, en changeant i en $-i$ une différence de potentiel $V(M_1) - V(M_2) = -\frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{r'_2}{r'_1}\right)$. Par superposition il vient donc

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{r_2 r'_1}{r'_2 r_1}\right)$$

Sur la médiatrice du segment AD , $r = r'$, la différence de potentiel sera donc nulle. Le plan médiateur de AD définit une surface équipotentielle.

- 3 Prenons M_1 sur l'électrode A de rayon a et M_2 sur l'électrode D de rayon a également, avec M_1 et M_2 sur la droite AD et les plus proches possibles. On a alors $r_1 = a$, $r_2 = l - a$, $r'_1 = l - a$ et $r'_2 = a$. En reportant dans l'expression précédente il vient $V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{(l-a)^2}{a^2}\right) \simeq \frac{i}{\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{l}{a}\right)$. La résistance de la plaque est donc $R = \frac{1}{\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{l}{a}\right)$ ce qui de la forme attendue en posant

$$R_0 = \frac{1}{\pi \gamma \varepsilon}$$

- 4 L'application numérique donne $R = 53 \text{ m}\Omega$ (on ne devrait même garder qu'un seul CS...) C'est une valeur difficile à mesurer avec le matériel dont on dispose au lycée. Mais des méthodes plus performantes existent!
- 5 Dans la configuration proposée on a $r_1 = r'_2 \simeq l$ et $r'_1 = r_2 \simeq \sqrt{2}l$, d'où en utilisant la relation précédente : $V(P) - V(Q) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{2l^2}{l^2}\right) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln(2)$, soit

$$R_{//} = \frac{1}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln(2)$$

II Dipôle et condensateur plan

1. L'approximation dipolaire consiste à étudier les effets de la distribution à une distance d'elle grande devant sa taille, soit ici $a \ll r$.
Le moment dipolaire est ici $\vec{p} = qa \vec{e}_z$.
2. Cf. cours. On travaille en coordonnées polaires dans un plan méridien des coordonnées sphériques d'axe Oz . On obtient alors $V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$.

3. Par la relation champ potentiel il vient $\vec{E} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$.
4. Tous les points de la surface élémentaire proposée sont à la même distance $\sqrt{r^2 + z^2}$ du point M et sont vus sous le même angle θ depuis le point M .

$$\text{On a donc } dV = \frac{2\pi r dr p_s \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)}.$$

Dans cette expression il faut faire attention à ce que $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$ et donc dépend de r !

$$\text{Au final on a donc } dV = \frac{2\pi r dr p_s z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

5. Par intégration entre 0 et R de la relation précédente il vient $V(z) = \frac{p_s}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$ pour $z > 0$.

Pour $z < 0$ il faut rendre la fonction impaire ce qui amène $V(z) = -\frac{p_s}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$.

Par symétrie le champ électrique n'est porté que par Oz pour un point de l'axe. Sa composante selon Oz peut alors se calculer par $E_z = -\frac{dV}{dz}$.

Il vient $\vec{E} = \frac{p_s}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$. Cette expression est valable pour les z positifs et négatifs.

6. On a facilement $p_s = \sigma e$.

On pourra se placer dans l'approximation dipolaire si $e \ll z$.

7. En réutilisant le résultat antérieur on obtient donc $\vec{E} = \frac{\sigma e}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$.
8. Dans ce cas limite il vient $\vec{E} = \frac{\sigma e}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{|z|^3} \vec{e}_z$. On peut noter une décroissance en $1/z^3$, caractéristique de l'aspect dipolaire de la distribution.
9. Il vient cette fois $\vec{E} = \frac{\sigma e}{2\epsilon_0 R} \vec{e}_z$.

Si on fait le rapport de sa norme avec $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ qui est la norme du champ dans le condensateur plan on obtient donc $\frac{e}{2R}$. Mais on a la hiérarchie $e \ll z \ll R$, ce qui fait que ce rapport est très petit devant 1. Autrement dit on peut considérer le champ nul sur l'axe Oz , ce qui est compatible avec ce que l'on sait du condensateur plan !

III Magnétostatique

1. On va travailler en coordonnées cartésiennes.

Soit M un point quelconque. Le plan (M, x, y) est un plan de symétrie des courants ; M appartient à ce plan par construction, dont le champ $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan, il est donc porté par \vec{u}_z .

Par ailleurs on constate une invariance par translation de la distribution de courant parallèlement à Oy et Oz , ce qui fait que le champ ne va dépendre que x .

On peut donc proposer $\vec{B} = B(x) \vec{u}_z$.

2. Considérons un contour rectangulaire dans un plan $y = \text{Cte}$, avec un côté parallèle à Oz de longueur ℓ , et les autres côtés d'abscisses $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$. Ce contour n'enlace aucun courant. D'après le théorème d'Ampère la circulation du champ magnétique le long de ce contour est nulle, ce qui amène ici $\ell (B(x_2) - B(x_1)) = 0$, d'où $B(x_2) = B(x_1)$. On en déduit que pour $x < 0$ le champ magnétique est uniforme.

3. Avec le contour proposé dont on va supposer que le côté d'abscisse x est parcouru dans le sens des z croissants, la circulation vaut $\ell(B(x) - B(x + dx))$. L'intensité des courants enlacés est alors facilement $\ell dx j(x)$. Dès lors par le théorème d'Ampère il vient $\frac{dB}{dx} = -\mu_0 j(x)$, ce qui est le résultat attendu.
4. Par intégration il vient donc $B(x) = \mu_0 j_0 a \exp\left(-\frac{x}{a}\right) + \text{Cte}$. La constante est déterminée par la relation de continuité en $x = 0$. On obtient alors $\mu_0 j_0 a + \text{Cte} = \frac{1}{2} \mu_0 j_0 a$, soit $\text{Cte} = -\frac{1}{2} \mu_0 j_0 a$.

Pour finir dans la zone $x > 0$ il vient $\vec{B}(M) = \frac{1}{2} \mu_0 j_0 a \left(2 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) - 1\right)$.

Le graphe demandé est donc constitué d'une droite horizontale à la valeur $\frac{1}{2} \mu_0 j_0 a$ jusqu'en $x = 0$, suivi d'une courbe en exponentielle décroissante qui se raccorde continûment, et qui décroît jusqu'à la valeur $-\frac{1}{2} \mu_0 j_0 a$ en $+\infty$. La constante d'espace de décroissance de cette exponentielle est a .

5. Les symétries pour cette distribution de courants sont les mêmes que celles dans le supraconducteur. Mais en plus le plan $x = 0$ est un plan de symétrie, ce qui fait que la fonction $B(x)$ recherchée doit être impaire.

Il faut alors prendre comme contour le même type de rectangle mais qui s'étend entre les abscisses $-x$ et $+x > 0$, orienté de manière à ce que le côté d'abscisse $-x$ soit parcouru dans le sens des z croissants. Dès lors la circulation vaut $-2\ell B(x)$.

L'intensité des courants enlacés vaut $\ell b j_0$ si $x > b/2$ et $2\ell x j_0$ si $0 < x < b/2$.

Par application du théorème d'Ampère on a donc :

- pour $x > b/2$, $B(x) = -\frac{1}{2} \mu_0 j_0 b \vec{u}_z$;
- pour $-b/2 < x < b/2$, $B(x) = -\mu_0 j_0 x \vec{u}_z$;
- pour $x < -b/2$, $B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 j_0 b \vec{u}_z$.

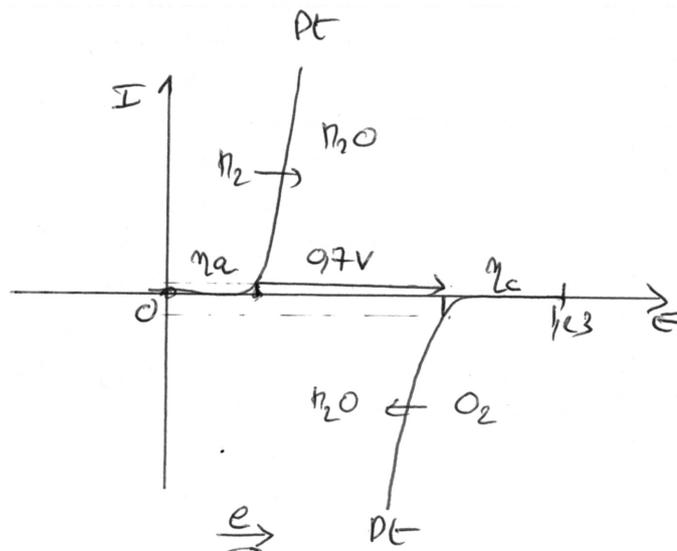
6. Chaque tranche comprise entre x et $x + dx$ crée un champ du côté des $x < 0$ donné d'après la question précédente par $\frac{1}{2} \mu_0 j(x) dx \vec{u}_z$ (dx joue le rôle de b car sur cette petite épaisseur on peut considérer la densité de courant comme uniforme de valeur $j(x)$).

Par intégration on a donc le champ du côté des $x < 0$ donné par $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \mu_0 j(x) dx \vec{u}_z = \frac{1}{2} \mu_0 j_0 a \vec{u}_z$ ce qui est le résultat désiré.

IV Chimie

IV.A Aspect cinétique d'une pile à combustible

1. Il s'agit d'un transfert indirect pour une réaction spontanée (fonctionnement en pile). Le pôle + correspond au couple ayant le potentiel le plus élevé, à savoir $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$. C'est la cathode, où aura lieu la réduction de O_2 en H_2O selon $\text{O}_2 + 4\text{e}^- + 4\text{H}_3\text{O}^+ \longrightarrow 6\text{H}_2\text{O}$. L'autre électrode sera la cathode ou aura lieu l'oxydation de H_2 en H_2O selon $\text{H}_2 + 2\text{H}_2\text{O} \longrightarrow 2\text{H}_3\text{O}^+ + 2\text{e}^-$. L'équation bilan est alors simplement $\text{O}_2 + 2\text{H}_2 \longrightarrow 2\text{H}_2\text{O}$!
2. À $pH = 0$, $P(\text{O}_2) = P(\text{H}_2) = 1$ bar les potentiels des couples sont égaux à leurs potentiels standard. Dès lors la prédiction thermodynamique donne une f.é.m de 1,23 V.
3. Il est probable que les couples ne soient pas rapides sur les électrodes de platine et que des surtensions viennent abaisser la f.é.m mesurée comme illustré sur les courbes suivantes :



IV.B Pile au lithium métal

1. On assiste à la réduction de MnO_2 en $\text{MnO}(\text{OH})$ selon $\text{MnO}_2 + e^- + \text{H}_3\text{O}^+ \longrightarrow \text{MnO}(\text{OH}) + \text{H}_2\text{O}$ à la cathode à la borne positive. De même on assiste à l'oxydation de Li en Li^+ selon $\text{Li} \longrightarrow \text{Li}^+ + e^-$.

Le fonctionnement global est alors $\text{MnO}_2 + \text{Li} + \text{H}_3\text{O}^+ \longrightarrow \text{MnO}(\text{OH}) + \text{Li}^+ + \text{H}_2\text{O}$.

2. La quantité de matière de lithium disponible est $n = \frac{m}{M} = 0,29$ mol.

D'après l'équation d'oxydation de Li on a $n_e = n$. Dès lors $Q = n_e \mathcal{F} = 28$ kC = 7,7 A·h.

3. Il vient facilement $C_m = \frac{Q}{m} = \frac{\mathcal{F}}{M} = 3,8 \cdot 10^3$ A·h·kg⁻¹. On voit que la pile au lithium métal est bien supérieure aux autres piles pour ce qui est de la capacité massique, d'où son intérêt dans les petits dispositifs.

4. La durée d'utilisation de la pile est simplement donnée par $\Delta t = \frac{Q}{I} = 8,8$ ans.

V Exercice (MPI* seulement)

1. Par définition dans état stable aucune grandeur ne varie au cours du temps. Dès lors u_C , tension au borne du condensateur est une constante. L'intensité $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ est alors nulle. Comme l'impédance d'entrée de la porte NAND2 est infini, l'intensité qui circule dans R est également i_c elle est donc nulle, ce qui a pour conséquence que $u_2 = 0$ nécessairement dans un état stable. Remarquons que cette conclusion est également valide pour la question suivante!

Comme $S = 1$, alors nécessairement $u_s = V_{dd}$. Dès lors puisque $u_e = V_{dd}$, la porte NAND1 impose $u_1 = 0$. On en déduit que finalement $u_c = 0$.

2. Comme vu précédemment $u_2 = 0$, et donc on a encore $u_s = V_{dd}$. Dès lors puisque $u_e = 0$, la porte NAND1 impose $u_1 = 1$. On en déduit que finalement $u_c = u_1 - u_2 = V_{dd}$.
3. Pour $t < 0$, $u_e = V_{dd}$. À $t = 0$ on annule u_e pendant une très courte durée τ . Décrire le fonctionnement du circuit et tracer les chronogrammes correspondant aux tensions u_1 , u_2 et u_s .

Remarques préliminaires :

- comme pour $t < 0$, $u_e = V_{dd}$, le système a atteint l'unique état stable correspondant, étudié à la première question : à savoir $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_c = 0$ et $u_s = V_{dd}$.

- on identifie un circuit RC série entre la sortie de NAND1 et une entrée de NAND2. On peut donc penser que les effets d'une variation de u_1 ne se feront ressentir sur u_s qu'au bout d'une durée de l'ordre de $\tau' = RC$.

À $t = 0$ le passage de u_e de V_{dd} à 0, impose le basculement de u_1 de 0 à V_{dd} puisque u_s reste encore à V_{dd} d'après uen remarque précédente. Dès lors l'étude du circuit RC série permet d'écrire que u_c vérifie l'équation différentielle $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau'} = \frac{V_{dd}}{\tau'}$, de solution $u_c(t) = V_{dd} + \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$. La continuité de la tension aux bornes du condensateur à $t = 0$ impose $\lambda = -V_{dd}$, soit $u_c(t) = V_{dd} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)$. On en déduit $u_2(t) = u_1 - u_c = V_{dd} \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$. On note la discontinuité de u_2 qui passe de 0 à V_{dd} à $t = 0$.

4. D'après ce qui précède la durée propre du monostable est $T = t_1 = RC \ln 2 = 1,04$ ms.
5. Par la table de vérité de la porte NAND2, on constate qu'alors sa sortie est toujours au niveau 1, quoi qu'il se passe à l'entrée. En gros on inhibe ainsi le fonctionnement du monostable.