SÉRIES ENTIÈRES

Cours

Définition 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
On appelle *série entière associée à la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & a_n z^n.\end{array}\right.$
Cette série de fonctions est abusivement notée $\sum a_n z^n$.

- Cette notation est ambigüe car $\sum a_n z^n$ peut ainsi désigner :
  - la **série de fonctions** $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : z\mapsto a_n z^n$,
  - la **série numérique** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où z est un complexe fixé.
- Au lieu d'être des fonctions de la variable complexe, les fonctions f_n peuvent être considérées comme des fonctions de la variable réelle c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}\\ x & \mapsto & a_n x^n.\end{array}\right.$
  On note alors plutôt la série entière $\sum a_n x^n$.
- $z\mapsto z^0$ désigne l'application constante égale à 1 donc par convention ici, $0^0 = 1$.
  Noter que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$ mais $f_0(0) = a_0$.

Exemples :

- $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est une série entière dont *les cœfficients* sont : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{n!}$.
- $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{n!}$ est une série entière dont les cœfficients sont : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{1}{n!}$.
  Une telle série entière est dite *lacunaire*.

I. Rayon de convergence

On s'intéresse tout d'abord à la nature de la **série numérique** $\sum a_n z^n$ **pour** z **complexe fixé**.

A. Définition

Théorème 2 (*Lemme d'Abel*)

Soit $z_0\in\mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Théorème 3

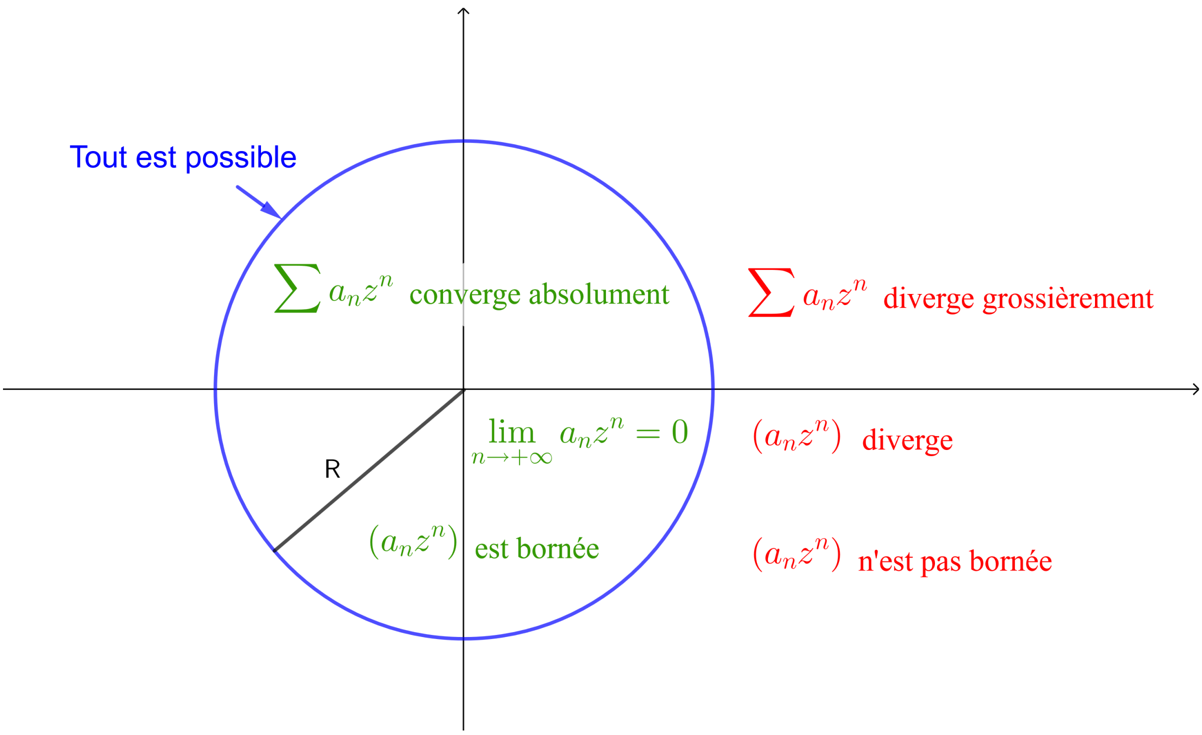
On note R l'élément de $[0,+\infty]$ défini par :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

- Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

R est appelé *le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$.

- L'ensemble $A = \{r \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ est un sous-ensemble non vide (car il contient 0) de $\mathbb{R}$. S'il est majoré alors A admet une borne supérieure $R \in \mathbb{R}_+$ et s'il ne l'est pas, on pose par convention $R = +\infty$.
- On poura noter $R\left(\sum a_n z^n\right)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
- On peut résumer le comportement de la série numérique $\sum a_n z^n$ suivant la localisation du complexe z par le dessin suivant :



Notons $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$. Pour tout $z \in D$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

D est appelé *le disque ouvert de convergence.*

Notons $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$. Pour $z \in C$, la série $\sum a_n z^n$ peut être convergente ou divergente.

C est appelé *le cercle d'incertitude.*

Pour la série entière de la variable réelle, $]-R, R[$ est *l'intervalle ouvert de convergence* et les points R et $-R$ sont *les points d'incertitude.*

- La fonction *somme de la série entière* est la fonction S définie par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
La fonction S est définie en tout point de D et elle peut aussi l'être en certains points de C.

Si on note $\mathscr{D}_S$ l'ensemble de définition de la somme en tant que fonction de la variable réelle, on a :

$$]-R,R[\subset \mathscr{D}_S \subset [-R,R].$$

Exemple 1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et préciser leur comportement aux points du cercle d'incertitude.

$$\sum z^n \quad , \quad \sum \frac{z^n}{n!} \quad , \quad \sum_{n\geqslant 1} n^n z^n \quad , \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} \quad , \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} z^n.$$

B. Détermination du rayon de convergence

Proposition 4

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
On a :

$$\begin{aligned} R &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que la série } \textstyle\sum a_n r^n \text{ converge}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que la série } \textstyle\sum a_n r^n \text{ converge absolument}\} \end{aligned}$$

- Remarquons que les ensembles considérés ne sont pas nécessairement les mêmes mais ils ont la même borne supérieure.

Exemple 2 : Pour quelles valeurs de $r \in \mathbb{R}_+$ la suite $\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} r^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend-elle vers 0 ? est-elle bornée ?

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} z^n$.

Proposition 5

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $R\left(\sum \lambda a_n z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right)$.
- On a $R\left(\sum n a_n z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right)$.

Proposition 6

- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R\left(\sum a_n z^n\right) \geqslant R\left(\sum b_n z^n\right)$.
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum b_n z^n\right)$.

- On rappelle que si $a_n = o(b_n)$ alors $a_n = O(b_n)$.
- Notons que dans le cas d'équivalence, le comportement sur le cercle d'incertitude n'est pas nécessairement le même.

Exemple 3 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n} x^n$.

- En dérivant terme à terme la série entière $\sum a_n z^n$, on obtient la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

En primitivant terme à terme la série entière $\sum a_n z^n$, on obtient la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n.$$

Corollaire 7

Le rayon de convergence est invariant par dérivation et primitivation terme à terme.

$$R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}\right) = R\left(\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right).$$

Théorème 8 (*Règle de d'Alembert pour les séries entières*)

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ à partir d'un certain rang, $a_n \neq 0$,

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ (limite finie ou infinie).

Alors $R\left(\sum a_n z^n\right) = \dfrac{1}{\ell}$ en posant par convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

- Cette règle est particulièrement efficace avec des puissances ou des factorielles.

Exemple 4 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$.

- Attention, cette règle ne peut pas s'appliquer avec une série lacunaire mais on peut dans ce cas revenir au critère de d'Alembert pour les séries numériques.

Exemple 5 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n \binom{2n}{n} x^{2n+1}$.

Corollaire 9

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$.

C. Opérations

Définition 10

On appelle *somme des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Proposition 11

Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières vérifie :

$$R\left(\sum (a_n + b_n) z^n\right) \geqslant \min\left(R\left(\sum a_n z^n\right), R\left(\sum b_n z^n\right)\right)$$

$$\text{avec égalité lorsque } R\left(\sum a_n z^n\right) \neq R\left(\sum b_n z^n\right).$$

Exemple 6 : Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum \left(\frac{1}{n!} + 1\right) z^n$ et $\sum \left(\frac{1}{n!} - 1\right) z^n$ puis de leur série somme.

- On peut noter qu'une série entière $\sum a_n z^n$ est la somme de la série entière des termes d'indices pairs $\sum a_{2n} z^{2n}$ et de la série entière des termes d'indices impairs $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$.

Définition 12

On appelle *produit de Cauchy des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(p,q) \in [\![0,n]\!]^2 \\ p+q=n}} a_p b_q$.

Proposition 13

Le rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières vérifie :

$$R\left(\sum c_n z^n\right) \geqslant \min\left(R\left(\sum a_n z^n\right), R\left(\sum b_n z^n\right)\right).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\left(R\left(\sum a_n z^n\right), R\left(\sum b_n z^n\right)\right)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

II. Propriétés de la somme d'une série entière

On s'intéresse ici à la série entière $\sum a_n x^n$ en tant que **série de fonctions de la variable réelle**. On note R son rayon de convergence, que l'on suppose strictement positif.

On note S sa fonction somme c'est-à-dire $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

A. Convergence de la série de fonctions

On sait déjà que la série entière converge simplement sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Théorème 14

La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement (et donc uniformément) sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

- Attention, en général, il n'y a pas convergence uniforme sur l'intervalle ouvert de convergence mais seulement sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Contre-exemple 7 : Montrer que la série entière $\sum x^n$ ne converge pas uniformément sur son intervalle ouvert de convergence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

  Par définition, la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles associée à la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ en tant que série de fonctions.

  Ainsi, la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence vers la fonction S, fonction somme de la série entière.

B. Régularité de la fonction somme

Théorème 15

La fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

Pour la série entière de la variable complexe, on admet que la fonction somme $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$.

La définition de la continuité d'une fonction de la variable complexe sera étudiée dans le chapitre Espaces vectoriels normés - Partie 2. *(C'est la même définition que celle des fonctions de la variable réelle, la notion de limite étant obtenue en remplaçant les valeurs absolues par des modules.)*

Exemple 8 : Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est continue sur $[-1, 1[$.

Théorème 16

La fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la dérivée k-ème de S s'y obtient par dérivation terme à terme :

$$\forall x \in]-R, R[,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

- Le rayon de convergence étant invariant par dérivation terme à terme, on a :

$$R\left(\sum_{n\geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}\right) = R\left(\sum a_n x^n\right).$$

- La dérivation terme à terme peut permettre de calculer des sommes de séries entières.

Exemple 9 :

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, les séries $\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$ convergent et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n\geqslant p} \binom{n}{p} x^{n-p}$ converge et $\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

Le résultat suivant permet de retrouver les cœfficients d'une série entière dont on connaît la somme.

Corollaire 17

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif, de somme S.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire 18 (*Unicité des cœfficients*)

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières.
On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]-r, r[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

C. Intégration

Proposition 19

On peut intégrer terme à terme la somme de la série entière sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence c'est-à-dire pour tout $(\alpha, \beta) \in]-R, R[^2$, on a :

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta a_n t^n \mathrm{d}t \right).$$

Théorème 20

Pour tout $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.
Ainsi, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ obtenue par primitivation terme à terme, est la primitive de $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur l'intervalle ouvert de convergence s'annulant en 0.

- Le rayon de convergence étant invariant par primitivation terme à terme, on a :

$$R\left(\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right) = R\left(\sum a_n x^n \right).$$

- L'intégration terme à terme peut permettre de calculer des sommes de séries entières.

Exemple 8 (suite) : Déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in [-1, 1[$.

III. Développement en série entière

A. Définition et premières propriétés

Une fonction *développable en série entière* est une fonction qui peut s'écrire comme la somme d'une série entière. Plus précisément :

Définition 21

Une fonction f est dite *développable en série entière (au voisinage de 0)* lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à r tels que :

$$\forall x \in]-r, r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exemple :
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ car $\forall x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Proposition 22

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Si la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ alors elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et les cœfficients de son développement sont uniques, donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Définition 23

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.
On appelle *série de Taylor de f* la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ainsi, si f est développable en série entière sur $]-r, r[$ alors f est la somme de sa série de Taylor sur $]-r, r[$. On a :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

- Il peut être intéressant de prouver qu'une fonction est développable en série entière pour prouver qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple 10 : On a prouvé que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

- Attention, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ n'est pas nécessairement développable en série entière. *Contre-exemple (cf. Exercice 9) :* la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

B. Obtention de développements en série entière

Voici quelques méthodes permettant d'obtenir un développement en série entière.

En utilisant la méthode proposée, montrer que chaque fonction est développable en série entière et donner son développement en série entière (on précisera soigneusement l'intervalle sur lequel le développement est valable).

$\boxed{1}$ *Changement de variable*

a) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ b) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

$\boxed{2}$ *Primitivation terme à terme*

a) $x \mapsto \ln(1+x)$ b) $x \mapsto \arctan x$

$\boxed{3}$ *Dérivation terme à terme*

a) $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ b) $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$

$\boxed{4}$ *En utilisant une équation différentielle*

Méthode :

- ⋆ On trouve un problème de Cauchy (équation différentielle et conditions initiales) dont la fonction à développer est l'unique solution.
- ⋆ On considère une série entière de rayon de convergence R strictement positif.
  Sa somme est solution du problème de Cauchy si et seulement si ses cœfficients vérifient certaines relations, que l'on résout pour déterminer une forme explicite des cœfficients.
- ⋆ On vérifie que la série entière trouvée a un rayon de convergence R strictement positif.
  Par raisonnement par analyse-synthèse, on obtient ainsi le développement en série entière de la fonction sur $]-R,R[$.

a) $x \mapsto e^x$ b) $x \mapsto (1+x)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{5}$ *Par linéarité*

a) $x \mapsto \text{ch}x$ b) $x \mapsto \text{sh}x$

$\boxed{6}$ *En utilisant les parties réelles et imaginaires*

a) $x \mapsto \cos x$ b) $x \mapsto \sin x$

$\boxed{7}$ *Par produit de Cauchy*

Il permet de prouver que le produit de deux fonctions développables en série entière est développable en série entière mais la formule des cœfficients n'est pas toujours très explicite.

a) $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ b) $x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$

$\boxed{8}$ *En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange*

Théorème 24 (*Inégalité de Taylor-Lagrange*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et $f^{(n+1)}$ est bornée sur I.
Alors pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in I} |f^{(n+1)}(t)| \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a) $x \mapsto \cos x$ b) $x \mapsto e^x$

9 | *En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral*

Théorème 25 (*Formule de Taylor avec reste intégral*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I.
Pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Corollaire 26

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$.
La fonction f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-r,r[,\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = 0.$$

C. Formulaire (à connaître)

$\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$
$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$	$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{i^n}{n!} x^n$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!} x^{2n}$	$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

On notera que les cœfficients sont les mêmes que ceux des développements limités de ces fonctions en 0.

Explication : On a prouvé que ces fonctions admettent un développement en série entière, elles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et les cœfficients sont donnés par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
D'après la formule de Taylor-Young, ces fonctions admettent aussi un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 avec ces mêmes cœfficients.

On veillera cependant à ne pas confondre un développement en série entière (valable sur tout l'intervalle $]-r,r[$ - global) et un développement limité en 0 (valable au voisinage de 0 - local).

D. Développement en série entière de fonctions de la variable complexe

Proposition 27

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Théorème 28

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

IV. Applications

A. Application en probabilités : fonction génératrice

cf Cours Variables aléatoires discrètes

Définition 29

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On appelle *fonction génératrice de X* et on note G_X la fonction définie par :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

B. Application aux équations différentielles

Exemple 11 : On considère l'équation différentielle (E) $(1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
On souhaite déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif.
On note S sa somme.

1. Montrer que S est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence à déterminer.
2. On suppose que S est solution de (E) sur $]-R, R[$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_n en fonction de a_0 et a_1.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
4. En déduire l'ensemble des fonctions développables en série entière solutions de (E).
   On exprimera les solutions trouvées à l'aide de fonctions usuelles.
5. On admet que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2.
   Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

C. Application au dénombrement

Exemple 12 : Nombre de dérangements
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *dérangement de l'ensemble* $[\![1, n]\!]$ toute permutation sans point fixe de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
On pose $d_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de dérangements de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Calculer $e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$ puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.