Algèbre Chapitre 7 : Polynômes
Feuille d'exercices

Exercice 1 : Echauffement calculatoire

Développer les polynômes suivants :

1. $(2X^4+X^3+X^2+X+1)(X^2-3X+1)$
2. $(X^3+X^2-X-1)(X^2-2X-1)$
3. $(X^2-4X+1)(X^4-X^2+3X+2)$
4. $P(Q)$ et $Q(P)$ avec $P=X^2+X+1$ et $Q(X)=X^2-1$
5. $P(X)=(X-1)^2\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$

Exercice 2 :

Soient a,b,c et d des nombres réels. Montrez qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(-1)=a$, $P'(-1)=b$, $P(1)=c$ et $P'(1)=d$.

Exercice 3 :

On appelle polynôme pair tout polynôme P tel que $P(-X)=P(X)$, et polynôme impair un polynôme P tel que $P(-X)=-P(X)$.

Montrez que tous les coefficients d'indices impairs d'un polynôme pair sont nuls. Que dire des coefficients d'un polynôme impair ?

Exercice 4 :

Déterminez le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A=X^4-X^3+3X^2+X-1$ et $B=X^2+X$
2. $A=X^4-2X^2+X$ et $B=X-1$
3. $A=X^n$ et $B=X^2-X-2$.
4. $A=X^n-3X+1$ et $B=X^2-3X+2$.
5. $A=X^n$ et $B=X^2-2X+1$.

Exercice 5 :

Montrez que les seuls polynômes périodiques sont les polynômes constants.

Exercice 6 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $a_0,\dots a_n$ des scalaires deux à deux distincts et $b_0,\dots b_n$ des scalaires.
On définit pour tout $i\in[\![0,n]\!]$:

$$L_i=\frac{1}{\prod_{j\in[\![0;n]\!]\setminus\{i\}}(a_i-a_j)}\cdot\prod_{j\in[\![0;n]\!]\setminus\{i\}}(X-a_j).$$

1. On considère le cas $n=2$ avec $a_0=0,a_1=1$ et $a_2=2$. Écrire les polynômes L_0,L_1 et L_2.
2. On revient au cas général.
   Montrer que pour tout $(i,k)\in[\![0,n]\!]^2, L_i(a_k)=\delta_{i,k}$.
3. Soit $P=\sum_{i=0}^{n} b_iL_i$. Montrer que P est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que :
   $\forall k\in[\![0;n]\!], P(a_k)=b_k$.

Exercice 7 :

1. Déterminez les polynômes P tels que $P(3X)=P'(X)P''(X)$
2. Même question avec $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$

Exercice 8 :

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définie par récurrence par

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1}{2} \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1} - X^2P_n \end{cases}$$

1. Montrez qu'il existe une suite réelle (a_n) telle que $P_n(X) = a_nX^n$.
2. Calculez P_n.

Exercice 9 :

1. Trouvez tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $P(x+y) = P(x)P(y)$
2. Même question avec $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $P(xy) = P(x) + P(y)$.
3. En déduire que le logarithme et l'exponentielle ne peuvent pas être des fonctions polynomiales.

Exercice 10 :

Déterminez l'ordre de multiplicité de la racine α dans les polynômes P suivants :

1. $\alpha = 2$ et $P(X) = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$
2. $\alpha = -2$ et $P(X) = X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16$
3. $\alpha = 1$ et $P(X) = X^{2n} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - X$

Exercice 11 :

Soit $n \geq 1$.

1. Montrez que $X + 2$ divise $X^4 + 3X^3 + X^2 + 4$
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X+1)^2$ divise $P = X^{4n+2} + 2X^{2n+1} + 1$.
3. Montrez que pour tout $n \geq 1$, le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 12 :

Trouver les réels a et b tel que $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$.

Exercice 13 :

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^2 + X + 1$ divise le polynôme $(X+1)^{2n+1} + X^{n+2}$.

Exercice 14 :

Ecrire la décomposition primaire des polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^2 + X + 1$
2. $-3X^2 + 5X + 2$
3. $2X^3 + 3X^2 - 3X - 2$
4. $X^4 - X^2 + 1$
5. $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$
   (indication $1 + i$ est racine)
6. $X^6 + 1$
7. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$

Exercice 15 :

Déterminez la décomposition en éléments simples de $\mathbb{R}[X]$ des fractions rationnelles suivantes et en déduire une primitive et les dérivées n-ième de la fonction associée :

1. $F(X) = \dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$
2. $F(X) = \dfrac{X^3 + X}{X^2 - 4X + 3}$
3. $F(X) = \dfrac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
4. $F(X) = \dfrac{X - 2}{X(X-1)^2}$ sous la forme $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{(X-1)^2}$