

# Analyse - Chapitre 5 : Primitives, intégrales, équations différentielles.

## - Feuilles d'exercices -

### Exercice 1 :

Déterminez une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle de travail.

1.  $f : x \mapsto x \cos(x^2)$

8.  $f : x \mapsto \sin(3x + 1)$

2.  $f : x \mapsto 2x^2(x^3 + 1)^4$

9.  $f : x \mapsto e^{2x-3}$

3.  $f : x \mapsto \tan x$

4.  $f : x \mapsto xe^{x^2}$

10.  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

5.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$

11.  $f : x \mapsto \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$

6.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^5}$

12.  $f : x \mapsto \frac{1}{1 + 4x^2}$

7.  $f : x \mapsto \frac{x}{(3 + x^2)^2}$

### Exercice 2 :

Étudiez l'ensemble de définition, puis déterminez une primitive des fonctions suivantes :

1.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ .

5.  $f : x \mapsto \frac{x + 4}{x^2 + 4x + 5}$

2.  $f : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + x - 6}$

6.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$ .

3.  $f : x \mapsto \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

7.  $f : x \mapsto \frac{2x - 1}{x^2 + x + 2}$ .

4.  $f : x \mapsto \frac{x + 3}{x^2 - 4x + 4}$

### Exercice 3 :

Déterminez une primitive des fonctions suivantes en précisant les intervalles sur lesquels vous travaillez.

1.  $f : x \mapsto xe^{3x+1}$

4.  $f : x \mapsto x^4 \ln(x)$

7.  $f : x \mapsto \arctan(x)$

2.  $f : x \mapsto x^2 e^x$

5.  $f : x \mapsto \frac{x}{\cos^2 x}$

8.  $f : x \mapsto \arcsin(x)$

3.  $f : x \mapsto (\ln(x))^2$

6.  $f : x \mapsto x^3 e^{x^2}$

9.  $f : x \mapsto e^x \cos 2x$

### Exercice 4 :

Justifiez l'existence des intégrales suivantes et calculez les :

1.  $\int_0^{2\pi} |\cos x| dx$

4.  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$

7.  $\int_0^1 \frac{4x - 2}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx$   
(écrire sous la forme  $\frac{a}{x + 2} + \frac{bx}{x^2 + 1}$ ).

2.  $\int_{-1}^1 x|x| dx$

5.  $\int_0^1 \frac{1}{1 + 4x^2} dx$

8.  $\int_1^e \ln(\sqrt{x}) dx$ .

3.  $\int_0^\pi \cos(2x) dx$

6.  $\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$

### ◆ Exercice 5 :

Soit  $f : x \mapsto \frac{x}{(1+2x)^2}$ .

1. Déterminez l'ensemble de définition de  $f$ , noté  $D_f$ , et montrez que

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, f(x) = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{(1+2x)^2}$$

2. Déterminez une primitive de  $x \mapsto \frac{e^{-2x}}{(1+2e^{-x})^2}$

### ◆ Exercice 6 :

Calculez les intégrales ou primitives suivantes :

1.  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$  (poser  $x = 2 \cos t, t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ )

3.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt$ .  
(poser  $u = \sin(t)$ )

2.  $\int_2^7 \frac{\sqrt{2+x}}{x+1} dx$   
(poser  $x = u^2 - 2$ ).

4. Donnez une primitive à  $x \mapsto \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$

### ◆ Exercice 7 :

Soit  $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$  et soit  $G(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

1. Montrez que le domaine de définition de  $F$  est  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrez que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculez  $F'(x)$ .
3. Déterminez le domaine de définition de  $G$ .
4. Exprimez  $G$  en fonction de  $F$  et montrez que  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
5. Calculez  $G'(x)$  et donnez une expression simple de la fonction  $G$ .

### ◆ Exercice 8 :

Résoudre les équations différentielles suivantes sur un intervalle à préciser :

1.  $y'(t) - \cos(t)y(t) = 0$ ;
2.  $e^t y'(t) - ty(t) = 0$ ;
3.  $ty'(t) - \ln(t)y(t) = 0$

### ◆ Exercice 9 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. sur  $\mathbb{R}$ ,  $y' - \frac{t}{1+t^2}y = t$

3. sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $ty' - 2y = t$ ;

2. sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $t(1+\ln^2(t))y' + 2y \ln(t) = 1$

4. sur  $]1, +\infty[$ ,  $(t^2 - 1)y' - 2ty = (t^2 - 1)^2$ ;

5. sur  $\mathbb{R}$ ,  $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ .

### ◆ Exercice 10 :

1. Soit l'équation différentielle  $xy' - 2y = 1$

- a) Résoudre l'équation sur  $] -\infty, 0[$ , puis sur  $]0, +\infty[$ .

- b) Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation sur  $\mathbb{R}$ , puis celles vérifiant  $y(-1) = -1/2$

2. Soit l'équation  $xy' - y = x^2 \arctan x$ .

- a) Résoudre l'équation sur  $] -\infty, 0[$ , puis sur  $]0, +\infty[$ .

- b) Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation sur  $\mathbb{R}$ , puis celles telles que  $y(0) = 0$ .