4.4 Cinématique fluides-Exercice 5

Un vibreur impose une oscillation sinusoïdale de période T et de très faible amplitude à la surface d'un bassin de grande dimension et à fond plat. On adopte le modèle de l'écoulement incompressible et irrotationnel associé à un potentiel des vitesses de la forme : $\Phi = f(z)\cos(\omega t - kx)$
La dépendance en x et t à z fixé décrit une onde progressive de vitesse c = ω/k et de longueur d'onde λ = 2π/k se déplaçant dans la direction Ox. Le fond du bassin est confondu avec le plan d'équation z = 0.

a-Etablir l'équation différentielle dont est solution f(z).

b-Ecrire la condition aux limites au fond du récipient et en déduire f(z) à une constant multiplicative près.

c-En déduire les composantes v_x et v_z du champ eulérien des vitesses.

d-Montrer que le champ des vitesses est stationnaire dans le référentiel (R') en translation rectiligne uniforme à la vitesse c selon Ox.

---

a-Ecoulement irrotationnel : $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$

Ecoulement incompressible : $\text{div}\vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\Phi) = 0 \;\Rightarrow\; \Delta\Phi = 0$

Donc : $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \;\Rightarrow\; -k^2 f(z)\cos(\omega t - kz) + \dfrac{d^2 f}{dz^2}\cos(\omega t - kz) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\dfrac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f(z) = 0}$

b-Le fluide ne peut ni rentrer dans le fond du bassin, ni en sortir, donc : $v_z(z=0) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}(z=0) = 0$

$\Rightarrow\; \dfrac{df}{dz}(z=0) = 0$

La solution de l'équation différentielle est : $f(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz}$

Or : $\dfrac{df}{dz}(z=0) = 0 \;\Rightarrow\; -kA + kB = 0 \;\Rightarrow\; A = B$

D'où : $\boxed{f(z) = 2A\text{ch}(kz)}$

c- $v_x = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \;\Rightarrow\; \boxed{v_x = 2Ak\,\text{ch}(kz)\sin(\omega t - kx)}$

$v_z = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} \;\Rightarrow\; \boxed{v_z = 2Ak\,\text{sh}(kz)\cos(\omega t - kx)}$

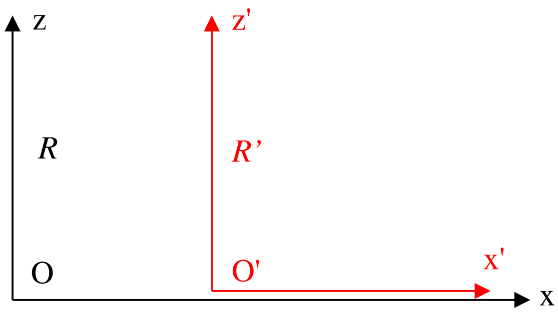
d-Loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M,t) = \vec{v}'(M,t) + \vec{c}$

Donc : $\vec{v}'(M,t) = \begin{cases} v'_x = 2Ak\,\text{ch}(kz)\sin(\omega t - kx) - c \\ v'_z = 2Ak\,\text{sh}(kz)\cos(\omega t - kx) \end{cases}$

Or : x′ = x -ct et z′ = z (transformation de Galilée)

Donc : $\omega t - kx = \omega t - k(x' + ct) = \omega t - kx' - kct = -kx'$

Soit : $\vec{v}'(M,t) = \begin{cases} v'_x = 2Ak\,\text{ch}(kz')\sin(-kx') - c \\ v'_z = 2Ak\,\text{sh}(kz')\cos(-kx') \end{cases}$



Le champ de vitesse dans R' est indépendant du temps. Il est stationnaire.
